Baccalauréat blanc n°2 : correction

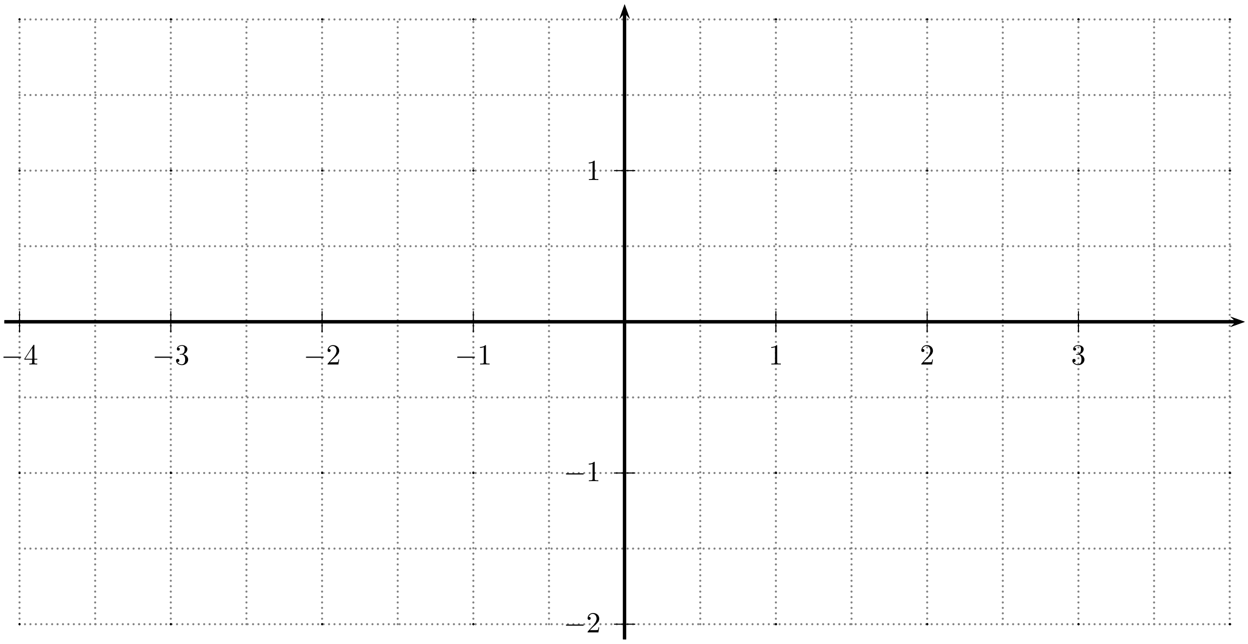
Exercice 1. *(8 points)*
On considère la fonction f définie sur par : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B - Étude de la fonction f.

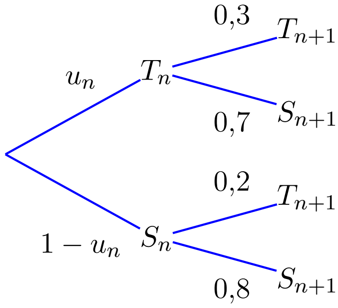
1. (a) Vérifier que $f(x) = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1}$, puis en déduire les limites de la fonction en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(1-x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$.
   (b) Donner un encadrement de α à 10^{-2}.
   (c) L'équation $f(x) = 0,5$ admet-elle d'autres solutions dans $\mathbb{R}$? Justifier.
4. (a) Montrer que la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.
   (b) Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T). On pourra utiliser la partie A.
5. Tracer la droite (T), les asymptotes et l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous.



Exercice 2. *(4 points)*

1. (a) D'après la formule des probabilités totales,
   $P(T_2) = P(T_1) \times P_{T_1}(T_2) + P(S_1) \times P_{S_1}(T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 = 0,15 + 0,1 = 0,25.$

   (b) Compléter l'arbre ci-dessous :



   (c) Pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $u_{n+1} = P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(S_n) \times P_{S_n}(T_{n+1}) = u_n \times 0,3 + (1-u_n) \times 0,2 = 0,1u_n + 0,2.$

2. (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} = 0,1\left(u_n + 2 - \frac{20}{9}\right) = 0,1\left(u_n + \frac{18}{9} - \frac{20}{9}\right) = 0,1v_n.$
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,1 et de premier terme : $v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{9}{18} - \frac{4}{18} = \frac{5}{18}$.

   (b) $v_n = \frac{5}{18} \times (0,1)^{n-1}$, d'où, $u_n = \frac{5}{18} \times (0,1)^{n-1} + \frac{2}{9}$.

   (c) $-1 < 0,1 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,1)^{n-1} = 0$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{9}$

Exercice 3. *(2 points)*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres 25 et $\dfrac{1}{3}$.

1. **Vrai.** $P(X=4) = \dbinom{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{21} = 12\,650 \times \frac{1^4 \times 2^{21}}{3^4 \times 3^{21}} = 12\,650 \times \dfrac{2^{21}}{3^{25}}.$

2. **Vrai.** $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \dbinom{25}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{25} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{25} = \frac{3^{25}}{3^{25}} - \frac{2^{25}}{3^{25}} = \dfrac{3^{25} - 2^{25}}{3^{25}}.$

3. **Faux.** $P(5 \leqslant X \leqslant 15) = P(X \leqslant 15) - P(X \leqslant 4) \approx 0,952$ à 10^{-3}.

Exercice 4. *(6 points)*
Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{ll} u_0 & = 0,3 \\ u_{n+1} & = 0,9u_n(1-u_n) \end{array}\right.$
où pour tout n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. $u_1 = 0,9u_0(1-u_0) = 0,9\times 0,3\times(1-0,3) = 0,189$; le nombre de tortues en 2001 est 189.
   $u_2 = 0,9u_1(1-u_1) = 0,9\times 0,189\times(1-0,189)\approx 0,138$; le nombre de tortues en 2001 est 138.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   (a) • **Initialisation**
   Pour $n=0$: $u_0 = 0,3$ et $0,3\times 0,9^0 = 0,3$ donc $0\leqslant u_0\leqslant 0,3\times 0,9^0$.
   La propriété est vraie au rang 0.
   • **Hérédité**
   On suppose que, pour $k\geqslant 0$, on a : $0\leqslant u_k\leqslant 0,3\times 0,9^k$. On va démontrer qu'elle est vraie au rang $k+1$.
   Soit : $0\leqslant u_{k+1}\leqslant 0,3\times 0,9^{k+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence : $0\leqslant u_k\leqslant 0,3\times 0,9^k$.
   On déduit : $0\leqslant 0,9\times u_k\leqslant 0,9\times 0,3\times 0,9^k$, c'est-à-dire : $0\leqslant 0,9\times u_k\leqslant 0,3\times 0,9^{k+1}$.
   D'où, $0\leqslant 0,9\times u_k\times(1-u_k)\leqslant 0,3\times 0,9^{k+1}\times(1-u_k)$
   Or, $0\leqslant 1-u_k\leqslant 1$.
   Donc, $0\leqslant u_{k+1}\leqslant 0,3\times 0,9^{k+1}$
   Donc la propriété est vraie au rang $k+1$ donc elle est héréditaire.
   • **Conclusion**
   L'inégalité est vraie pour $n=0$, et elle est héréditaire pour tout $n\geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, on peut donc dire que l'inégalité est vraie pour tout entier naturel n.

   On a donc démontré par récurrence que, pour tout n, $0\leqslant u_n\leqslant 0,3\times 0,9^n$.

   (b) $-1<0,9<1$ donc la suite géométrique $(0,9^n)$ a pour limite 0 ;
   on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,3\times 0,9^n = 0$.
   On sait que, pour tout n, $0\leqslant u_n\leqslant 0,3\times 0,9^n$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   Cela signifie que cette population de tortues est en voie d'extinction.
3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
   On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues, c'est-à-dire $0,03$ millier de tortues.
   On complète l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence :

```
u ← 0,3
n ← 0
Tant que u ⩾ 0,03 faire :
    n ← n + 1
    u ← 0,9u(1 − u)
Fin Tant que
Afficher 2000 + (n − 1)
```

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} &= 0,032 \\ v_{n+1} &= 1,06 v_n\,(1 - v_n) \end{cases}$$

où pour tout $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. $v_{11} = 1,06 v_{10}\,(1 - v_{10}) = 1,06 \times 0,032(1 - 0,032) \approx 0,033$; il y aura donc 33 tortues en 2011.
   $v_{12} = 1,06 v_{11}\,(1 - v_{11}) = 1,06 \times 0,033(1 - 0,033) \approx 0,034$; il y aura donc 34 tortues en 2012.
2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente vers ℓ.
   $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - v_n) =$
   $1 - \ell$; on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,06 v_n\,(1 - v_n) = 1,06\ell(1 - \ell)$.
   De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.
   Comme $v_{n+1} = 1,06 v_n\,(1 - v_n)$, d'après l'unicité de la limite, on peut dire que
   $\ell = 1,06\ell(1 - \ell)$.
3.

$$\begin{align} \ell &= 1,06\ell(1-\ell) \tag{1}\\ \Leftrightarrow \ell &- 1,06\ell + 1,06\ell^2 = 0 \tag{2}\\ \Leftrightarrow &- 0,06\ell + 1,06\ell^2 = 0 \tag{3}\\ \Leftrightarrow \ell&(-0,06 + 1,06\ell) = 0 \tag{4}\\ \Leftrightarrow \ell &= 0 \text{ ou } -0,06 + 1,06\ell = 0 \tag{5}\\ \Leftrightarrow \ell &= 0 \text{ ou } \ell = \frac{0,06}{1,06} \tag{6} \end{align}$$

   Seule la solution $\ell = \frac{0,06}{1,06} \approx 0,057$ est possible, soit 57 tortues.
   De plus, la suite (v_n) est croissante et $v_{10} = 0,032$ ce qui signifie qu'il y a a 32 tortues en 2010.
   Donc, pour tout $n \geqslant 10$, $v_n \geqslant v_{10}$ autrement dit $v_n \geqslant 0,032$.
   Il y aura donc au moins 32 tortues pour toute année au delà de 2010, donc cette population de tortues n'est plus en voie d'extinction.