CORRIGE - Bac blanc de Maths - TS

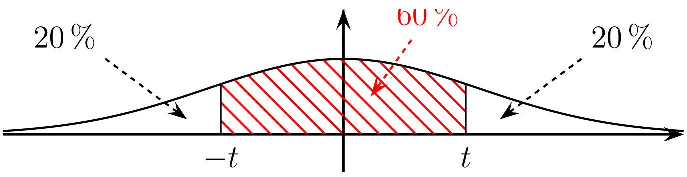
EXERCICE 1 : **5 points**

Partie A

1. Chaque tir est une épreuve de Bernoulli de succès : "la flèche atteint la cible", de probabilité $p = 0,8$.
   On répète 4 fois de façon identique et indépendante le tir.
   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de flèches atteignant la cible. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8$.
   Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, on a : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
2. On doit calculer $P(X \geqslant 3)$:
   $P(X \geqslant 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \times 0,8^3 \times 0,2^1 + \binom{4}{4} \times 0,8^4 \times 0,2^0$
   $= 0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}8192 \approx 0,819.$
   On peut aussi utiliser la fonction Bcd de la calculatrice :
   $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 0,819.$
3. La concurrent tire n flèches de façon indépendante ; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$.
   Pour atteindre en moyenne 12 fois la cible, il faut que l'espérance mathématique de la variable X soit égale à 12. Une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ a pour espérance mathématique $E(X) = np$ avec $p = 0,8$.
   $E(X) = np \iff n \times 0,8 = 12 \iff n = \dfrac{12}{0,8} \iff n = 15.$
   Il faut donc que le concurrent prévoie 15 flèches pour atteindre en moyenne la cible 12 fois.

Partie B

1. Pour que la flèche soit hors de la bande grisée, il faut que $(X < -10)$ ou $(X > 10)$.
   La probabilité que la flèche soit hors de la bande grisée est :
   $P\big((X < -10) \cup (X > 10)\big) = 1 - P(-10 \leqslant X \leqslant 10) \approx 1 - 0,683$ soit $0,317$ à 10^{-3} près.
2. On cherche un nombre positif t tel que $P(-t \leqslant X \leqslant t) = 0,6$. L'espérance de la la loi normale considérée est $\mu = 0$, donc la courbe de la fonction densité associée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On en déduit :



$$\begin{aligned}
P(-t \leqslant X \leqslant t) = 0,6 &\iff & P(X \leqslant t) - P(X \leqslant -t) &= 0,6\\
&\iff & P(X \leqslant t) - P(X \geqslant t) &= 0,6\\
&\iff & P(X \leqslant t) - (1 - P(X \leqslant t)) &= 0,6\\
&\iff & 2P(X \leqslant t) - 1 &= 0,6\\
&\iff & 2P(X \leqslant t) &= 1,6\\
&\iff & P(X \leqslant t) &= 0,8
\end{aligned}$$

à la calculatrice, on trouve $t \approx 8,416$.

Pour que la probabilité d'atteindre cette bande grisée soit approximativement de 0,6, on délimite la bande grise par les droites d'équations $x = -8,4$ et $x = 8,4$; alors .

Partie C

La durée de vie en heures du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

1. La probabilité que le panneau fonctionne au moins 2 000 heures est $P(T \geqslant 2000)$.
   $P(T \geqslant 2000) = \text{e}^{-10^{-4}\times 2\,000} \approx 0,819$.
   Dans le cas où on ne se souvient plus de la formule du cours, on refait le calcul suivant :
   $$P(T \geqslant 2000) = 1 - P(T \leqslant 2000) = 1 - \int_0^{2000} \lambda\,\text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x = 1 - \left[-\text{e}^{-\lambda x}\right]_0^{2000}$$
   $$= 1 - \left(1 - \text{e}^{-2000\lambda}\right) = \text{e}^{-2000\times 10^{-4}} = \text{e}^{-10^{-4}\times 2\,000} \approx 0,819$$
2. *Restitution organisée des connaissances*
   Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.
   (a) On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\text{e}^{-\lambda t}$.
   La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $$F'(x) = -1 \times \text{e}^{-\lambda t} + \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) \times (-\lambda)\,\text{e}^{-\lambda t} = -\,\text{e}^{-\lambda t} + \lambda t\,\text{e}^{-\lambda t} + \text{e}^{-\lambda t} = \lambda t\,\text{e}^{-\lambda t} = f(t)$$
   Donc F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) L'espérance de la variable aléatoire T est :
   $$E(T) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t\,\text{e}^{-\lambda t}\,\text{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\text{d}t = \lim_{x\to+\infty} \left(F(x) - F(0)\right)$$
   $$= \lim_{x\to+\infty} \left(\left[\left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)\text{e}^{-\lambda x}\right] - \left[-\frac{1}{\lambda} \times 1\right]\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x\,\text{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\,\text{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right)$$
   $$\lim_{x\to+\infty} -x\,\text{e}^{-\lambda x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{\text{e}^{\lambda x}} \text{ donc } E(T) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{\text{e}^{\lambda x}} - \frac{1}{\lambda}\,\text{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right)$$
   - $$\left.\begin{array}{l} \lambda > 0 \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \lambda x = +\infty \\ \text{On pose } X = \lambda x \\ \text{On sait que } \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\text{e}^X}{X} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\text{e}^{\lambda x}}{\lambda x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{\text{e}^{\lambda x}} = 0$$
   - $$\left.\begin{array}{l} \lambda > 0 \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \lambda x = +\infty \\ \text{On pose } X = \lambda x \\ \text{On sait que } \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \text{e}^{-X} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-\lambda x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\,\text{e}^{-\lambda x} = 0$$
   - Par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(-x\,\text{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\,\text{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$ et donc $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

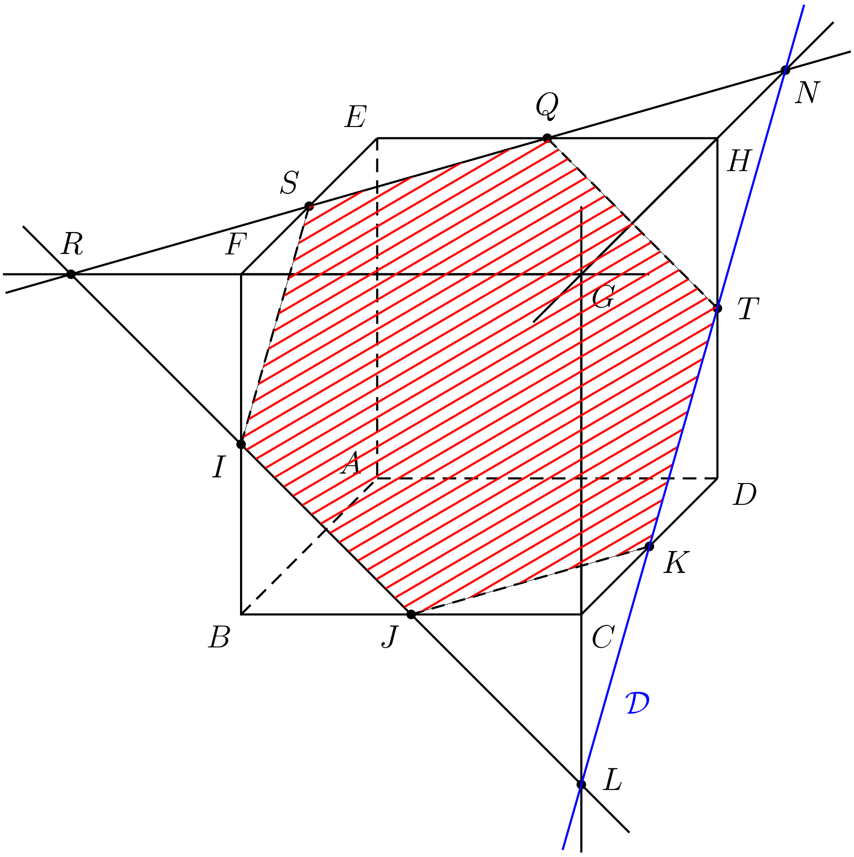
   L'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents est $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4$ soit 10 000 heures.

EXERCICE 3 : **5 points**

Commun à tous les candidats. *Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.*

Partie A.

1. Les droites (IJ) et (CG) sont coplanaires, non parallèles et non confondues. Elles sont donc sécantes en un point L.
2. On construit :
   - le point L ;
   - l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
   - la section du cube par le plan (IJK).



Partie B

L'espace est muni d'un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points $M(1;-2;-1)$ et $N(3;-5;-2)$.

1. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$

   Donc $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-3t\\z=-1-t\end{cases}$, avec $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (MN).

2. Le vecteur $\vec{u}_1\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{MN}$, donc les droites (MN) et (d') ne sont ni parallèles ni confondues.

   On résout le système : $\begin{cases}1+2t &= 2-k\\-2-3t &= 1+2k\\-1-t &= k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+2t &= 2-(-1-t)\\-2-3t &= 1+2(-1-t)\\-1-t &= k\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2t & = 3+t \\ -2-3t & = -1-2t \\ -1-t & = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t & = 2 \\ t & = -1 \\ -1-t & = k \end{cases} \textbf{ IMPOSSIBLE.}$$

Donc, il n'existe pas deux réels t et k tels que : $\begin{cases} 1+2t & = 2-k \\ -2-3t & = 1+2k \\ -1-t & = k \end{cases}$ et donc, les droites (MN) et (d') ne sont pas sécantes. Par conséquent, elles ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point M et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(1;1;-1)$ et $\overrightarrow{v}(0;5;-1)$.

   (a) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires.

   (b) On en déduit que la droite (MN) et le plan $\mathscr{P}$ sont parallèles avec le point M en commun. La droite (MN) est donc incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

   (c) $\begin{cases} x & = 1+l \\ y & = -2+l+5l' \\ z & = -1-l-l' \end{cases}$, avec l et l' des réels est une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$. On résout le système : $\begin{cases} 2-k & = 1+l \\ 1+2k & = -2+l+5l' \\ k & = -1-l-l' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+l & = 1 \\ 2k-l-5l' & = -3 \\ k+l+l' & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+l & = 1 \\ 3k-5l' & = -2 \\ 1+l' & = -1 \end{cases}$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} k+l & = 1 \\ k & = -4 \\ l' & = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l & = 5 \\ k & = -4 \\ l' & = -2 \end{cases}$$

   D'où, $\begin{cases} x & = 2-(-4) = 6 \\ y & = 1+2\times(-4) = -7 \\ z & = -4 \end{cases}$.

   Le plan $\mathscr{P}$ et la droite (d') se coupent donc en $P(6;-7;-4)$.

Exercice 5- Spécialité **5 points**

1. (a) D'après l'énoncé, le nombre d'avancés au début du mois $n+1$ sera composé de la moitié des débutants du mois précédent passant au niveau avancé soit $\dfrac{1}{2}d_n$, de la moitié du nombre des avancés ne s'étant pas désinscrits soit $\dfrac{1}{2}a_n$ et des 70 personnes qui se sont inscrites en début du mois.
On obtient bien : $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70$

(b) En posant $U_n = \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix}$, le système s'écrit sous la forme matricielle :

$$U_{n+1} = AU_n + B$$

(c) On considère la proposition $\mathcal{P}_n$: "'$A^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(I_2 + nT\right)$"'.

— **Initialisation** : Pour $n = 1$, on a bien $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\left(I_2 + T\right)$.

— **Hérédité** : Supposons qu'il existe un entier k non nul tel que $A^k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(I_2 + kT\right)$.

$$\begin{aligned} A^{k+1} = A^k \times A &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(I_2 + kT\right) \times \frac{1}{2}\left(I_2 + T\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \left(I_2 + I_2 \times T + kT \times I_2 + kT^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \left(I_2 + T + kT + kT^2\right) \end{aligned}$$

Or, $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $A^{k+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} \left(I_2 + (k+1)T\right)$ et la proposition est vraie au rang $k+1$.

— **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(I_2 + nT\right).$$

2. (a) On cherche une matrice colonne $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $C = AC + B$.

$$C = AC + B \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2}x + 100 \\ y &=& \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 70 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 200 \\ \frac{1}{2}y &=& \frac{1}{2} \times 200 + 70 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 200 \\ y &=& 340 \end{array}\right.$$

Ainsi $C = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.
On peut aussi calculer la matrice $I_2 - A$, monter qu'elle est inversible en donnant son inverse à l'aide de la calculatrice. On obtient (...) $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. D'après le cours,

$$\begin{aligned} C = AC + B \iff (I_2 - A)C = B \iff C &= (I_2 - A)^{-1}B \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) On remarque que $V_n = U_n - C$. On a alors :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C \iff V_{n+1} = AU_n + B - (AC + B) \iff U_{n+1} = A(U_n - C) = AV_n$$

(c) On a $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix}$.

Par définition de V_n, on a aussi : $U_n = A^n \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.

En utilisant le résultat de la question 2. , on obtient, par calcul matriciel :

$$\begin{aligned} U_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ n\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. (a) En admettant que pour $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2 > 0$, comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $0 < \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

En multipliant les membres de l'inégalité par $100n$, on obtient, après simplification :

$$0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}.$$

(b) D'après le théorème des gendarmes, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{100}{n} = 0$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

De plus $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Ainsi (limites de sommes) :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}.$$

La fréquentation se stabilise, à long terme, autour de 200 internautes débutants et 340 internautes avancés.

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1 + 2 + \ldots + n$.

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. On remarque que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$, donc 36 est un nombre triangulaire. De plus, $36 = 6^2$.
2. (a) $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier $p \iff 1 + 2 + \ldots + n = p^2 \iff \dfrac{n(n+1)}{2} = p^2 \iff n(n+1) = 2p^2 \iff n^2 + n - 2p^2 = 0$.
   Donc le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2 + n - 2p^2 = 0$.

   (b) $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1 \iff 4n^2+4n+1-8p^2 = 1 \iff 4n^2+4n-8p^2 = 0 \iff n^2+n-2p^2 = 0$
   Donc le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne $x^2 - 8y^2 = 1$, où $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

1. Deux couples solution sont $(3\,;\,1)$ car $3^2 - 8 \times 1^2 = 1$, et $(1\,;\,0)$ car $1^2 - 8 \times 0^2 = 1$.
2. Soit $(x\ ;\ y)$ un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\ ;\ y)$ solution de (E).
   Alors $1 = x^2 - 8y^2 = x \times x - 8y \times y$.
   Donc d'après le théorème de Bézout, x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+8y \\ x+3y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 3x+8y \\ y' & = & x+3y \end{array} \right.$
2. On peut déterminer A^{-1} à la calculatrice et on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ainsi :
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x'-8y' \\ -x'+3y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
   $$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3x'-8y' \\ y & = & -x'+3y' \end{array} \right.$$
3. $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) $\iff x^2 - 8y^2 = 1$
   $\iff (3x'-8y')^2 - 8\,(-x'+3y')^2 = 1$
   $\iff 9x'^2 - 48x'y' + 64y'^2 - 8\,(x'^2 - 6x'y' + 9y'^2) = 1$
   $\iff 9x'^2 - 48x'y' + 64y'^2 - 8x'^2 + 48x'y' - 72y'^2 = 1$
   $\iff x'^2 - 8y'^2 = 1$
   $\iff (x'\ ;\ y')$ est solution de (E)
4. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3,\ \ y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E)".

- Pour $n = 0$: $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$ donc $x_0^2 - 8y_0^2 = 9 - 8 = 1$ donc $(x_0\,;\,y_0)$ est solution de (E).
  La proposition est vraie au rang 0.
- On suppose qu'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que la proposition est vraie, c'est-à-dire que $(x_p\,;\,y_p)$ est solution de (E).
  On veut démontrer que $(x_{p+1}\,;\,y_{p+1})$ est solution de (E).
  On a vu dans la question précédente que si $(x\,;\,y)$ était solution de (E), alors $(x'\,;\,y')$ défini par $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est aussi solution de (E).
  Comme $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E), on en déduitque $(x_{n+1}\,;\,y_{n+1})$ est solution de (E) puisque $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$. Donc la proposition est vraie au rang $p+1$.
- D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n, c'est-à-dire $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E) pour tout n.

Pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

On cherche un nombre triangulaire supérieur à 2 015 qui est le carré d'un entier.

- Dans la partie **A** on a vu qu'un nombre triangulaire $1 + 2 + \ldots + n$ était un carré si et seulement s'il existait un entier p tel que $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.
- Dans la partie **C** on a déterminé une suite de couples $(x_n\,;\,y_n)$ qui sont tous solutions de l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$.
- En partant de $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et en multipliant successivement par la matrice A, on trouve comme solutions de (E) : $\begin{pmatrix}17\\6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}99\\35\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}577\\204\end{pmatrix}$ ...où chaque valeur de x est associé à un entier n tel que $x = 2n+1$ et tel que $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ est le carré d'un entier.
  Or l'entier $x = 17 = 2 \times 8 + 1$ ne convient pas car si $n = 8$, alors :
  $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$ et 36 n'est pas supérieur à 2015.
  De même, l'entier $x = 99 = 2 \times 49 + 1$ ne convient pas car si $n = 49$, alors :
  $1 + 2 + 3 + \ldots + 49 = \dfrac{49 \times 50}{2} = 1225$ et 1225 n'est pas supérieur à 2015.
  Mais $x = 577 = 2 \times 288 + 1$ convient car si $n = 288$, alors $1 + 2 + 3 + \ldots + 288 = \dfrac{288 \times 289}{2} = 41\,616$ est supérieur à 2015.
  Vérification : $41\,616 = 204^2$.