Corrigé du Bac Blanc
Mars 2018

Exercice 1
Commun à tous les candidats

1. On considère une fonction f définie, continue et dérivable sur $[-1;+\infty[$ dont on donne la courbe $\mathcal{C}$.
On étudie les variations de f pour en déduire le signe de f'.
f est décroissante sur $]-1;0[$ puis croissante sur $]0;2[$ puis décroissante sur $]2;3[$.
Donc f' est négative sur $]-1;0[$ puis positive sur $]0;2[$ puis négative sur $]2;3[$.
La courbe représentative de la fonction f' est donc : $\boxed{\mathcal{C}_2}$

2. On étudie le signe de f pour en déduire les variations de F car $F' = f$.
f est positive sur $[-1;-0,5]$ puis négative sur $[-0,5;0,6]$, positive sur $[0,6;2,9]$ et enfin négative sur $[2,9;3]$.
Ainsi, F est croissante sur $[-1;-0,5]$ puis décroissante sur $[-0,5;0,6]$, croissante sur $[0,6;2,9]$ et enfin décroissante sur $[2,9;3]$.
La courbe représentative de la fonction F est donc $\boxed{\mathcal{C}_1}$.

3. On admet que la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur cet intervalle.
Si on note f' sa fonction dérivée, alors pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

a. $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **b.** $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{x^2}$ **c.** $\boxed{f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}}$ **d.** $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Dérivée d'un quotient de fonctions dérivables : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

4. Deux collègues communiquent régulièrement par vidéoconférence. On suppose que la durée d'une communication entre ces deux personnes, exprimée en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,120]$.
Sachant que la communication dure depuis 30 minutes, la probabilité que la durée de la communication ne dépasse pas 90 minutes est égale à :

a. $\dfrac{1}{3}$ **b.** $\dfrac{1}{2}$ **c.** $\boxed{\dfrac{2}{3}}$ **d.** $\dfrac{3}{4}$

Si la variable aléatoire T modélise la durée de communication, la probabilité cherchée est :
$$P_{(T\geqslant 30)}(T\leqslant 90) = \frac{P\Big((T\leqslant 90)\cap(T\geqslant 30)\Big)}{P(T\geqslant 30)} = \frac{P(30\leqslant T\leqslant 90)}{P(30\leqslant T\leqslant 120)} = \frac{\frac{90-30}{120-0}}{\frac{120-30}{120-0}} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

Exercice 2

1. Dérivons g'
g est de la forme $u\times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = 5-3\ln(x)$.
On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\frac{3}{x}$
Donc $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1(5-3\ln(x)) + x(-\frac{3}{x}) = 5-3\ln(x) - 3 = 2-3\ln(x)$

2. Étude du signe de g'
$2-3\ln(x)\geqslant 0$ ssi $-3\ln(x)\geqslant -2$ ssi $\ln(x)\leqslant \frac{2}{3}$ ssi $x\leqslant \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$
On a $g(0,5) = \frac{1}{2}(5+3\ln 2)\approx 3,54$; $g(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}) = 3\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\approx 5,84$ et $g(5) = 5(5-3\ln 5)\approx 0,86$

x	$0,5$		$e^{\frac{2}{3}}$		5
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$3,54$	$\nearrow$	$5,84$	$\searrow$	$0,86$

3. **a.** g est continue et strictement croissante sur $[0,5;\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}]$. De plus, $g(0,5) < 4$ et $g(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}) > 4$ donc, d'après le TVI, l'équation $g(x) = 4$ admet une unique solution α sur $[0,5;\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}]$.
On a $\alpha_1 \approx 0,62$

b. $g(x) - 4 \geqslant 0$ ssi $g(x) \geqslant 4$
Ainsi, d'après le tableau de variation précédent, $g(x) - 4 \geqslant 0$ sur $[\alpha_1;\alpha_2]$ et $g(x) - 4 < 0$ sur $[0,5;\alpha_1[\cup]\alpha_2;5]$.

4. **a.** $G(x) = -\frac{3}{2}x^2\ln(x) + \frac{13}{4}x^2$; Dérivons G et prouvons que $G' = g$.
$G(x) = u(x) \times v(x) + w(x)$
avec $u(x) = -\frac{3}{2}x^2 \qquad u'(x) = -\frac{3}{2} \times 2x = -3x$
$v(x) = \ln(x) \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$
$w(x) = \frac{13}{4}x^2 \qquad w'(x) = \frac{13}{4} \times 2x = \frac{13}{2}x$
Ainsi, $G'(x) = -3x\times\ln(x)+\frac{1}{x}\times(-\frac{3}{2}x^2)+\frac{13}{2}x = -3x\ln(x)-\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}x = -3x\ln(x)+5x = x\big(-3\ln(x)+5\big) = g(x)$
Donc G est une primitive de g.

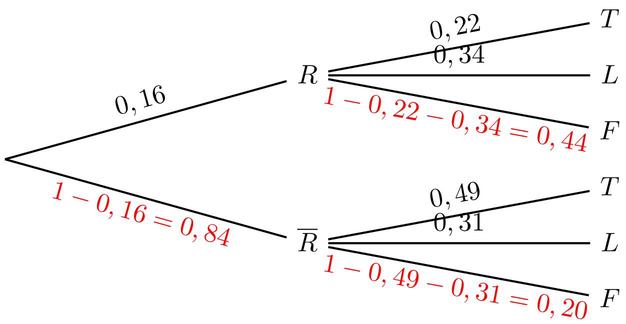
b. Calculons $\int_1^e g(x)dx = G(e) - G(1)$
$G(e) = -\frac{3}{2}e^2\ln(e) + \frac{13}{4}e^2 = \frac{7}{4}e^2$
$G(1) = -\frac{3}{2} \times 1^2\ln(1) + \frac{13}{4} \times 1^2 = \frac{13}{4}$
Ainsi, $\int_1^e g(x)dx = \frac{7}{4}e^2 - \frac{13}{4} \approx 9,68$

Exercice 3
Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les réponses seront arrondies au dix-millième.

Partie A

1. On représente la situation par un arbre de probabilité.



2. $P(R \cap T) = p(R) \times p_R(T) = 0,16 \times 0,22 \approx 0,0352$.
La probabilité que le véhicule provienne de la région parisienne et qu'il soit utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail est $0,0352$.

3. La probabilité qu'un véhicule soit utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail est, d'après la formule des probabilités totales :
$p(T) = p(R \cap T) + p\left(\overline{R} \cap T\right) = p(R) \times p_R(T) + p\left(\overline{R}\right) \times p_{\overline{R}}(T) = 0,16 \times 0,22 + 0,84 \times 0,49 = 0{,}446\,8$

4. **a.** $p_T(R) = \dfrac{p(R \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,16 \times 0,22}{0{,}446\,8} = \dfrac{0{,}035\,2}{0{,}446\,8} \approx 0{,}078\,8$

b. On calcule $p(L) = p(R \cap L) + p\left(\overline{R} \cap L\right) = 0,16 \times 0,34 + 0,84 \times 0,31 = 0{,}314\,8$
$p_L(R) = \dfrac{p(R \cap L)}{p(L)} = \dfrac{0,16 \times 0,34}{0{,}314\,8} = \dfrac{0{,}054\,4}{0{,}314\,8} \approx 0{,}172\,8$.

c. $p_L(R) > p_T(R)$ C'est donc Madame Dupont qui a la plus grande probabilité d'habiter dans la région parisienne.

Partie B

1. L'expérience « Choisir une voiture du parc au hasard »a deux issues possibles.
   Le succès : « Elle utilisée pour le travail »$p(T) = 0{,}446\,8$
   et l'échec : « Elle n'est pas utilisée pour le travail » ;
   On répète 10 fois l'expérience, de façon identique et indépendante et X compte le nombre de succès ;
   donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}446\,8$.
2. La probabilité qu'exactement deux véhicules soient utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail est :
   $p(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0{,}446\,8^2 \times (1 - 0{,}446\,8)^{10-2} \approx 0{,}078\,8$
3. La probabilité qu'au moins un véhicule soit utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail est :
   $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times 0{,}446\,8^0 \times (1 - 0{,}446\,8)^{10} \approx 0{,}997\,3$

Exercice 4

Partie A

1. Le taux d'évolution annuel entre 2012 et 2013 est donné par :
   $$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} = \frac{575\,038 - 610\,156}{610\,156} \approx -0{,}057\,555 \text{ soit environ - } 5{,}76\,\%$$
2. Le taux d'évolution moyen annuel entre 2011 et 2015 est environ de $-2,73\,\%$.
   Deux façons de justifier ce taux.
   - En vérifiant : on applique une baisse de $2,73\,\%$ par an en partant de l'année 2011.
     Baisser de $2,73\,\%$, c'est multiplier par $1 - \dfrac{2,73}{100} = 0,9727$.
     Baisser de $2,73\,\%$ pendant 4 ans, c'est multiplier par $0,9727^4$.
     Le nombre d'abonnés en 2011 est de 620 214 ; avec cette baisse sur 4 ans, il serait de
     $620\,214 \times 0,9727^4 \approx 555\,210$ qui est proche de la valeur donnée pour 2015 : 555 239.
   - En calculant ce taux moyen qu'on appelle t_m.
     On passe de l'année 2011 à l'année 2015 en multipliant par $(1 + t_m)^4$.
     Le coefficient multiplicateur pour passer de 2011 à 2015 est $\dfrac{555\,239}{620\,214}$.
     On doit donc avoir $(1 + t_m)^4 = \dfrac{555\,239}{620\,214}$ donc $1 + t_m = \left(\dfrac{555\,239}{620\,214}\right)^{\frac{1}{4}}$ et donc
     $t_m = \left(\dfrac{555\,239}{620\,214}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx -0,0273$ qui correspond bien à un pourcentage de $-2,73\,\%$.

Partie B

1. Perdre 10 %, c'est multiplier par $0,9$; $620 \times 0,9 = 558$. On rajoute 52 milliers de nouveaux abonnés, donc il y aura $558 + 52 = 610$ milliers d'abonnés en 2012.
2. Il y a u_n milliers d'abonnés en $(2011 + n)$; pour passer à l'année suivante, on en retire 10 % donc on arrive à $0,9u_n$, puis on en ajoute 52 milliers donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 52$, pour tout n.
3. On définit la suite (v_n), pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 520$. On a donc $u_n = v_n + 520$.

   a.
   - $v_{n+1} = u_{n+1} - 520 = 0,9u_n + 52 - 520$
     $= 0,9\,(v_n + 520) - 468 = 0,9v_n + 468 - 468 = 0,9v_n$
   - $v_0 = u_0 - 520 = 620 - 520 = 100$

   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = 100$.

   b. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = 100$ donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 100 \times 0,9^n$.

   c. Pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 520$; or $v_n = 100 \times 0,9^n$
   donc $u_n = 100 \times 0,9^n + 520$.

   d. $u_{n+1} - u_n = 100 \times 0,9^{n+1} + 520 - (100 \times 0,9^n + 520)$
   $= 100 \times 0,9^{n+1} + 520 - 100 \times 0,9^n - 520$
   $= 100 \times 0,9^n \times 0,9 - 100 \times 0,9^n$
   $= 100 \times 0,9^n\big(0,9 - 1\big)$
   $= -10 \times 0,9^n$
   Ainsi pour tout $n \in$, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

4. Le quotidien est considéré en difficulté financière lorsque le nombre d'abonnés est inférieur à 540 milliers.

   a. $u_n \leqslant 540$
   ssi $100 \times 0,9^n + 520 \leqslant 540$
   ssi $100 \times 0,9^n \leqslant 20$
   ssi $0,9^n \leqslant 0,2$
   ssi $n \ln(0,9) \leqslant \ln(0,2)$
   ssi $n \geqslant \dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,9)}$
   ssi $n \geqslant 16$ car $\dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,9)} \approx 15,28$

   b. Le quotidien sera en difficultés financières au bout de 16 ans soit en 2027.