1$^{\text{ère}}$ Générale **Corrigé du devoir commun**

Exercice 1 **(8 points)**

Dans cet exercice, les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -n^2 - 2n + 9$:

1) Calculer les cinq premiers termes de cette suite. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de cette suite.

$$u_0 = 9 \; ; \; u_1 = 6 \; ; \; u_2 = 1 \; ; \; u_3 = -6 \text{ et } u_4 = -15$$

0,5 ***point***

On observe que $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$; on peut conjecturer que la suite est strictement décroissante.

0,5 ***point***

2) Démontrer que $u_{n+1} - u_n = -2n - 3$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -(n+1)^2 - 2(n+1) + 9 - (-n^2 - 2n + 9) \\ &= -(n^2 + 2n + 1) - 2n - 2 + 9 + n^2 + 2n - 9 \\ &= -n^2 - 2n - 1 - 2n - 2 + 9 + n^2 + 2n - 9 \\ &= -\cancel{n^2} - 2n - 1 - \cancel{2n} - 2 + \cancel{9} + \cancel{n^2} + \cancel{2n} - \cancel{9} \\ &= -2n - 3 \end{aligned}$$

1,5 ***point***

3) Étudier les variations de la suite (u_n).

1$^{\text{ère}}$ méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$; donc :

$$-2n \leq 0$$
$$-2n - 3 \leq -3$$
$$-2n - 3 \leq 0$$

1 ***point***

2$^{\text{ème}}$ méthode :

On cherche n tel que :

$$-2n - 3 \geq 0$$
$$-2n \geq 3$$
$$n \leq -\frac{3}{2}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, donc $-2n - 3 \leq 0$

1 ***point***

Par conséquent $u_{n+1} - u_n \leq 0$, et donc (u_n) est décroissante.

0,5 ***point***

Partie B **:**

L'étude d'une souche de bactéries montre qu'elles se reproduisent par division. Chaque bactérie se divise en 3 toutes les 24 heures. On place une centaine de bactéries dans un milieu de culture, et on étudie le nombre de bactéries présentes au bout de n jours.

On note (p_n) la suite donnant le nombre de bactéries au bout de n jours :

1) Expliquer pourquoi $p_0 = 100$.

On a placé une centaine de bactéries au début de l'expérience, donc $\boldsymbol{p_0 = 100}$**.**

0,5 *point*

2) Montrer que $p_{n+1} = 3\,p_n$.

Le nombre de bactéries le (n + 1) $^{\text{ième}}$ ***jour est le triple de celui du n*** $^{\text{ième}}$ ***jour donc :*** $\boldsymbol{p_{n+1} = 3 \times p_n = 3\,p_n}$

0,5 *point*

3) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n > 0$. Justifier que la suite (p_n) est croissante.

1*ère* *méthode :*

$$p_{n+1} - p_n = 3p_n - p_n = 2p_n$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n > 0$, ***donc*** $2p_n > 0$;

Donc (p_n) ***est croissante***

(0,5 + 0,5) *point*

2*ème* *méthode :*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n > 0$ ***et :***

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{3p_n}{p_n} = 3 > 1$$

Donc (p_n) ***est croissante***

(0,5 + 0,5) *point*

4) Quelle est la population de bactéries au bout d'une semaine ?

On cherche $\boldsymbol{p_7}$ **:**

Au bout d'une semaine, il y aura $\boldsymbol{p_7 = 218\,700}$ ***bactéries.***

1 *point*

5) Déterminer, par la méthode de votre choix, le nombre de jours nécessaires pour que cette population de bactéries dépasse $1\,000\,000$ individus.

Quelle que soit la méthode, il faut 9 jours pour que le nombre de bactéries dépasse le million d'individus.

1 *point*

Exercice sur le second degré et le barème sur $\boxed{9}$ points

1) Soit $P(x) = -x^2 - 4x + 5$. Calculer la valeur de $P(-3)$ en indiquant les étapes.

Réponse : $P(x) = -x^2 - 4x + 5$ donc $P(-3) = -(-3)^2 - 4 \times (-3) + 5 = -9 + 12 + 5 = 8$.
$\boxed{0{,}5}$ points, on compte 0 s'il n'y aucune étape ou si la réponse est fausse

2) Soit $Q(x) = 7 - 2(x+5)^2$. Déterminer les coefficients a, b et c tels que $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Réponse : $Q(x) = 7 - 2(x+5)^2 = 7 - 2(x^2 + 10x + 25) = 7 - 2x^2 - 20x - 50 = -2x^2 - 20x - 43$ donc $a = -2$, $b = -20$ et $c = -43$.
$\boxed{1}$ point : 0,5 pour l'identité remarquable ou le développement et 0,5 pour le reste des calculs

3) Soit $R(x) = 5x^2 - 30x + 40$.

a. Donner les racines de R.

Réponse : $5x^2 - 30x - 40$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 5$, $b = -30$ et $c = 40$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4 \times 5 \times 40 = 900 - 800 = 100$. Puisque $\Delta > 0$, le polynôme R admet deux racines données par

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{30 - \sqrt{100}}{10} = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{30 + \sqrt{100}}{10} = 4$$

$\boxed{1{,}5}$ points : 0,5 pour le Δ et 0,5 pour chaque racine

b. Donner la forme canonique de R.

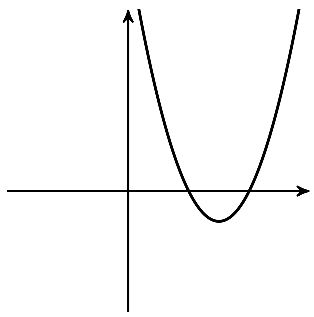
Réponse : On a $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{30}{10} = 3$ et $\beta = R(\alpha) = R(3) = 5 \times 3^2 - 30 \times 3 + 40 = 45 - 90 + 40 = -5$.

Donc $R(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = 5(x-3)^2 - 5$ est la forme canonique de R.
$\boxed{1{,}5}$ points : 0,5 pour α, 0,5 pour β, et 0,5 pour la conclusion (0 s'il n'y a pas de carré dans la conclusion)

c. Dresser le tableau de signes de R.

On a trouvé les deux racines 2 et 4.

Le coefficient $a = 5 > 0$ donc la parabole a grossièrement cette allure :



ce qui nous permet de compléter le tableau de signes

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
signes de $R(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{1}$ point : 0,5 pour la justification des signes ($a > 0$ et quelques mots) et 0,5 pour le reste

4) Soit $S(x) = -3x^2 + 7x - 1$.

a. Dresser le tableau de variations de S.

Réponse : $-3x^2 + 7x - 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -3$, $b = 7$ et $c = -1$ donc $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-7}{-6} = \dfrac{7}{6}$.

On a $a = -3 < 0$ donc la parabole a les branches tournées vers le bas, le tableau de variations est donc

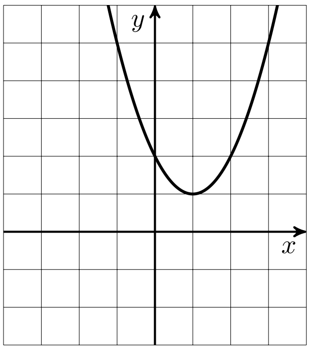
x	$-\infty$	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
variations de S	$\nearrow$	$S\left(\frac{7}{6}\right)$	$\searrow$

$\boxed{1}$ point : 0,5 pour α et 0,5 pour la justification du sens des flèches

b. Préciser le minimum ou le maximum de S.

Réponse : S admet donc un maximum qui vaut $S\left(\frac{7}{6}\right) = -3\left(\frac{7}{6}\right)^2 + 7\left(\frac{7}{6}\right) - 1 = \dfrac{37}{12}$. $\boxed{0{,}5}$ points, 0 s'il n'y a que la valeur approchée

5) On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction qui est du type $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Pour répondre aux questions suivantes votre argumentation utilisera des éléments de la représentation graphique.

a. Quel est le signe de a ?

Réponse : $a > 0$ car les branches de la parabole sont tournées vers le haut.
$\boxed{1}$ point : 0,25 pour la réponse et 0,75 pour la justification

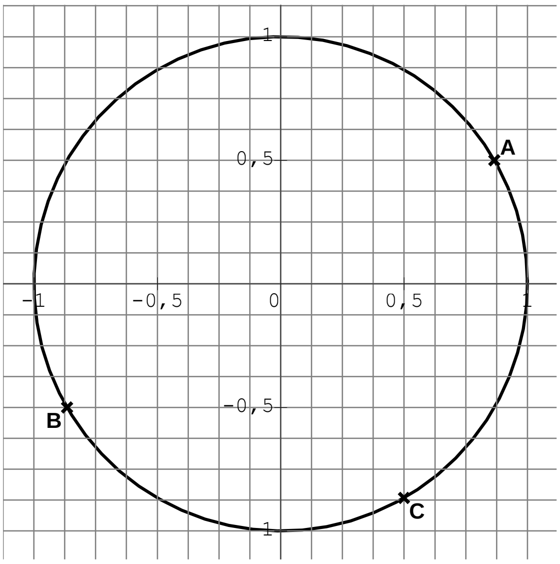
b. Quel est le signe du discriminant Δ ?

Réponse : $\Delta < 0$ car la parabole ne traversera jamais l'axe des abscisses (son sommet est au-dessus de l'axe des abscisses), la fonction f n'admet donc aucune racine.
$\boxed{1}$ point : 0,25 pour la réponse et 0,75 pour la justification

Exercice 3 [6pts]

1) a) $[0,5]$ C est associé au réel $\frac{-\pi}{3}$

b) **0,25 pour A; 0,5 pour B et 0,25 pour C**



2) a) $cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ $[0,5]$

$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $[0,5]$

$-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $[0,25]$

Autre méthode : $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **[1,25]**

b) $sin\left(\frac{130\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ $[0,5]$

$\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $[0,5]$

3) a) $cos\left(\frac{-4\pi}{5}\right) = \cos(\frac{\pi}{5} - \pi)$ $[0,5]$

$\cos\left(\frac{\pi}{5} - \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ $[0,5]$

$-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ $[0,25]$

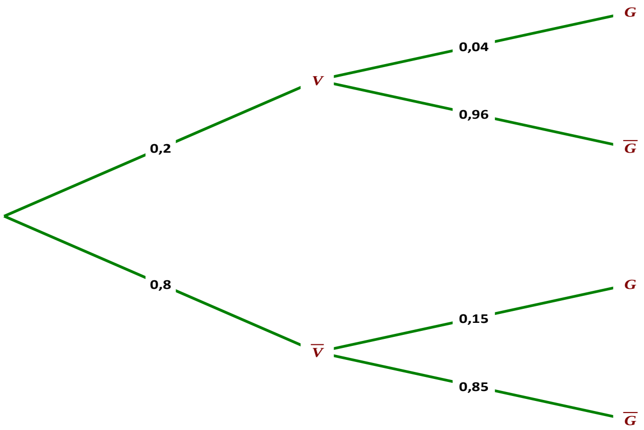
b) $sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ $[0,5]$

$1 - cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ $[0,5]$

Exercice 4

Partie A (4,5 points)

1) Arbre pondéré 1 (0,5 pour la structure et 0,5 pour les probabilités)



2) $P(V\cap G)=P(V)\times P_V(G)=0,2\times 0,04=0,008$. 0,5 (le calcul de 0,2 x 0,04 suffit)

3) a) Les événements V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales : **(+0,5 en bonus)**
$P(G)=P(V\cap G)+P(\overline{V}\cap G)$ 0,5 $=0,008+0,8\times 0,15=0,008+0,12=0,128$. 0,5

b) 12,8 % de la population de cette ville a contracté la grippe. 0,5

4) $$P_{\overline{G}}(V)=\frac{P(V\cap\overline{G})}{P(\overline{G})}=\frac{P(V)\times P_V(\overline{G})}{1-P(G)}=\frac{0,2\times 0,96}{1-0,128}=\frac{0,192}{0,872}\approx 0,22.$$ 1

(0,25) (0,25) (0,25) (0,25)

La probabilité qu'une personne soit vaccinée sachant qu'elle n'est pas grippée est environ 0,22.
Ou : environ 22 % des personnes non grippées sont vaccinées. 0,5

Partie B (4,5 points)

1) a) $P(A)=\frac{207}{360}=\frac{23}{40}$ 0,25 et $P(F)=\frac{160}{360}=\frac{4}{9}$. 0,25

b) $A\cap F$: « la fiche obtenue est celle d'une femme adulte » 0,5

$P(A\cap F)=\frac{92}{360}=\frac{23}{90}$. 0,5

c) $P(A)\times P(F)=\frac{23}{40}\times\frac{4}{9}=\frac{23}{90}$. 0,5

Puisque $P(A\cap F)=P(A)\times P(F)$, on en déduit que A et F sont indépendants. 0,5 (0 si injustifié)

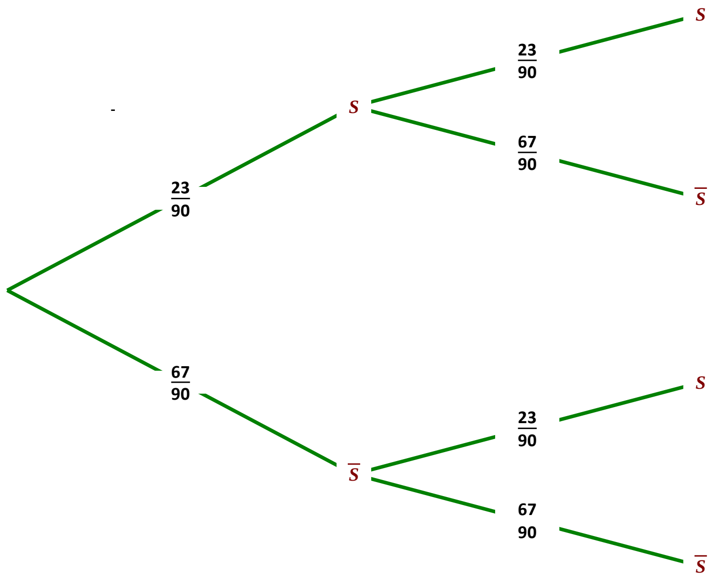
Remarque : on peut aussi justifier avec $P_A(F)=\frac{92}{207}=\frac{4}{9}=P(F)$ ou $P_F(A)=\frac{92}{160}=\frac{23}{40}=P(A)$

d) $P_A(\overline{F})=\frac{115}{207}=\frac{5}{9}$. 0,5

La probabilité que la fiche obtenue soit celle d'un homme sachant que c'est celle d'un adulte est $\frac{5}{9}$.

(+0,5 en bonus pour simplifier toutes les fractions)

2) a) Arbre pondéré 0,5



b) On répète successivement et de façon indépendante deux fois la même épreuve (tirer au hasard une fiche)

On note T : « obtenir au moins un succès »

Alors $\overline{T}$: « obtenir aucun succès »

$$P(T)=1-P(\overline{T})=1-P\left(\left\{\overline{S},\overline{S}\right\}\right)=1-\frac{67}{90}\times\frac{67}{90}=1-\left(\frac{67}{90}\right)^2\approx 0,45.$$ 1 (à valoriser)

Ou alors (mais c'est plus long) :

$$P(T)=P\left(\left\{S,\overline{S}\right\}\right)+P\left(\left\{\overline{S},S\right\}\right)+P(\{S,S\})=\frac{23}{90}\times\frac{67}{90}+\frac{67}{90}\times\frac{23}{90}+\frac{23}{90}\times\frac{23}{90}\approx 0,45.$$

La probabilité que le secrétaire ait prélevé au moins une fiche d'une femme adulte est environ 0,45.

Exercice 5 : 8 points

Partie A :

1. $f(-3)=-2$ 0,5 pt
2. $f'(-3)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-2-2}{-3+5}=\dfrac{-4}{2}=-2$. 1 pt
3. $y=f'(-3)\times(x-(-3))+f(-3)$ 0,5 pt
   $y=-2\times(x+3)-2=-2x-6-2$
   $y=-2x-8$ 0,5 pt

Partie B :

1. $f(2)=2^2+4\times2+1=4+8+1=13$ 0,5 pt
2.
   a) $f(2+h)=(2+h)^2+4(2+h)+1=4+4h+h^2+8+4h+1=h^2+8h+13$ 1,5 pt
   b) $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{h^2+8h+13-13}{h}=\dfrac{h^2+8h}{h}=8+h$ 1 pt
3. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=8+h$ donc $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=8$. 0,5 pt
   On en déduit donc que f est dérivable au point d'abscisse 2. 0,5 pt
   On a $f'(2)=8$. 0,5 pt
4. $y=f'(2)\times(x-2)+f(2)$ 0,5 pt
   $y=8\times(x-2)+13=8x-16+13$
   $y=8x-3$ 0,5 pt