Correction du devoir commun de 1ère générale – 17 mai 2022

<u>Exercice 1</u> : Suites

Partie A

1) a) Puisque la taille de l'arbre augmente de 50 cm par an, la suite (T_n) est arithmétique de raison $r = 50$.

b) $T_n = T_0 + nr = 200 + 50n$.

2) On résout l'inéquation $T_n > 3500$ car $35\text{m} = 3500\text{cm}$.

$$T_n > 3500 \Leftrightarrow 200 + 50n > 3500 \Leftrightarrow 50n > 3300 \Leftrightarrow n > \frac{3300}{50} \Leftrightarrow n > 66$$

On en déduit que la taille de cet arbre dépassera 35m au cours de l'année 2066.

3) L'année 2089 correspond au rang $n = 89$.

La taille de cet arbre en 2089 sera égale à $T_{89} = 200 + 89 \times 50 = 4650$ cm, c'est à dire 46,50m.

Partie B

1) a) Puisque le montant est multiplié par 1,05 chaque année, la suite (C_n) est géométrique de raison $q = 1{,}05$.

b) $C_n = C_0 \times q^n = 6000 \times 1{,}05^n$.

2) Au bout de 50 ans, le montant contenu dans le compte sera égal à $C_{50} = 6000 \times 1{,}05^{50} \approx 68804{,}40$ €.

3) On recherche le plus petit entier n tel que $C_n > 50000$.

En procédant par balayage avec le tableur, on obtient $C_{43} \approx 48898 < 50000$ et $C_{44} \approx 51342{,}90 > 50000$.

La suite (C_n) est strictement croissante car $C_0 > 0$ et $q > 1$.

On en déduit que le montant contenu dans le compte dépassera 50000 € au bout de 44 ans.

Partie C

Soit $P_n = n^2 + n + 41$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) $P_0 = 41$; $P_1 = 1^2 + 1 + 41 = 43$; $P_2 = 2^2 + 2 + 41 = 47$; $P_3 = 3^2 + 3 + 41 = 53$.

2) $P_1 - P_0 = 43 - 41 = 2$ et $P_2 - P_1 = 47 - 43 = 4$. Puisque $P_2 - P_1 \neq P_1 - P_0$, la suite (P_n) n'est pas arithmétique.

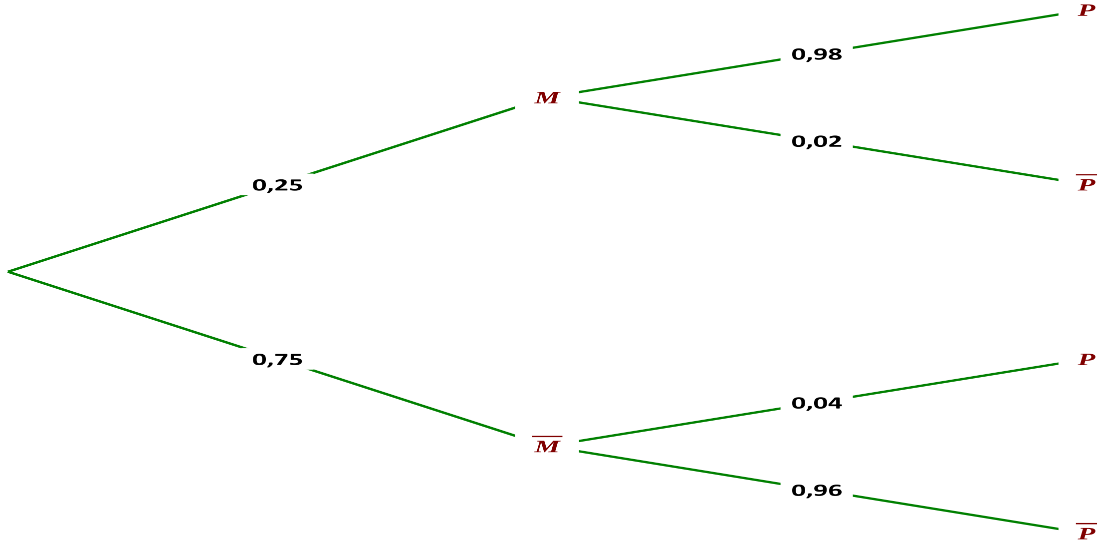
$\frac{P_1}{P_0} = \frac{43}{41} \approx 1{,}05$ et $\frac{P_2}{P_1} = \frac{47}{43} \approx 1{,}09$. Puisque $\frac{P_2}{P_1} \neq \frac{P_1}{P_0}$, la suite (P_n) n'est pas géométrique.

<u>Exercice 2</u> : Probabilités

Partie A

1) $p(M) = 25\% = 0{,}25$; $p_M(P) = 98\% = 0{,}98$ et $p_{\overline{M}}(\overline{P}) = 96\% = 0{,}96$.

2) Arbre pondéré



3) $p(M\cap P)=p(M)\times p_M(P)=0,25\times 0,98=0,245$.

4) Les événements $M\cap P$ et $\overline{M}\cap P$ constituent une partition de P. d'après la formule des probabilités totales :
$p(P)=p(M\cap P)+p(\overline{M}\cap P)=0,245+0,75\times 0,04=0,245+0,03=0,275$.
On en déduit que 27,5% de la population de New York a été testée positive.

5) Le test donne un bon diagnostic lorsque $M\cap P$ ou $\overline{M}\cap\overline{P}$ est réalisé.
Puisque $M\cap P$ et $\overline{M}\cap\overline{P}$ sont incompatibles, on calcule la somme des deux probabilités :
$p(M\cap P)+p(\overline{M}\cap\overline{P})=0,245+0,75\times 0,96=0,245+0,72=0,965$.
Le test donne un bon diagnostic dans 96,5% des cas.

6) $p_{\overline{P}}(M)=\dfrac{p(M\cap\overline{P})}{p(\overline{P})}=\dfrac{0,25\times 0,02}{1-p(P)}=\dfrac{0,005}{0,725}=\dfrac{1}{145}\approx 0,007$.

Partie B

1) a) $p(G)=\dfrac{2020}{2500}=0,808$.

b) $p(A)=\dfrac{920}{2500}=0,368$.

2) $G\cap A$: « l'habitant rencontré a été guéri après l'injection du vaccin et a plus de 60 ans ».
$p(G\cap A)=\dfrac{767}{2500}=0,3068$.

3) $p_G(A)=\dfrac{767}{2020}\approx 0,38$.

<u>Exercice 3</u>

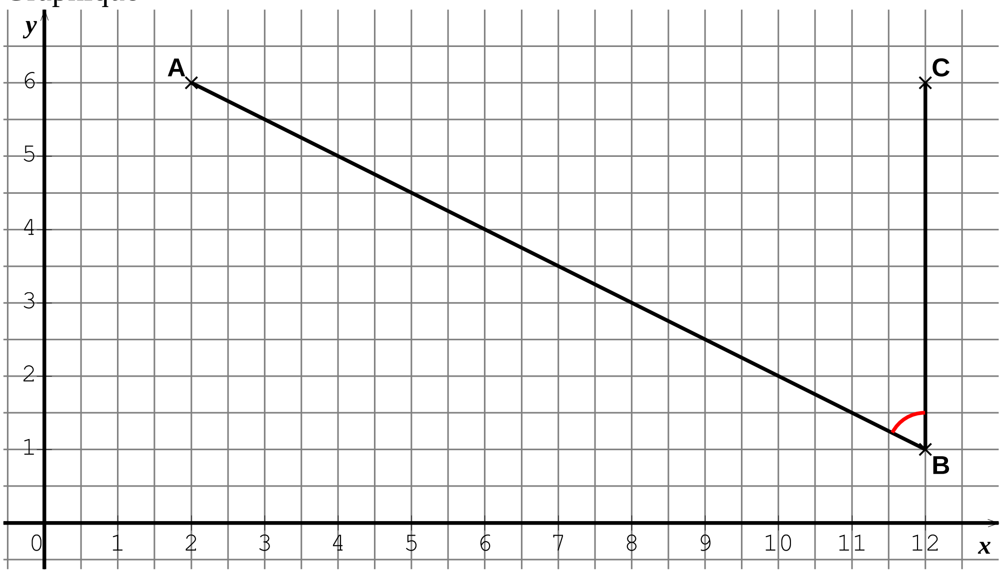
Partie A

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos BAC=6\times 9\times\cos\dfrac{\pi}{3}=6\times 9\times\dfrac{1}{2}=27$.

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6^2+27=-36+27=-9$.

Partie B

1) Graphique



2) a) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2-12\\6-1\end{pmatrix};\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-10\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}12-12\\6-1\end{pmatrix};\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-10\times 0+5\times 5=25$

c) $AB = \left\| \overrightarrow{BA} \right\| = \sqrt{(-10)^2 + 5^2} = \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$

$BC = \left\| \overrightarrow{BC} \right\| = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$

d) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$

On a donc $\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \times BC} = \dfrac{25}{5\sqrt{5} \times 5} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

e) On en déduit que $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) \approx 63,4°$

Partie C

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1-m)(m-3) + 2(m+5) = m - 3 - m^2 + 3m + 2m + 10 = -m^2 + 6m + 7$

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 6m + 7 = 0$.

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times 7 = 36 + 28 = 64$.

Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions.

Il existe donc deux valeurs de m pour lesquelles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Ces deux valeurs sont : $m_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-14}{-2} = 7$ et $m_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = \dfrac{2}{-2} = -1$.

Exercice 4

Partie A

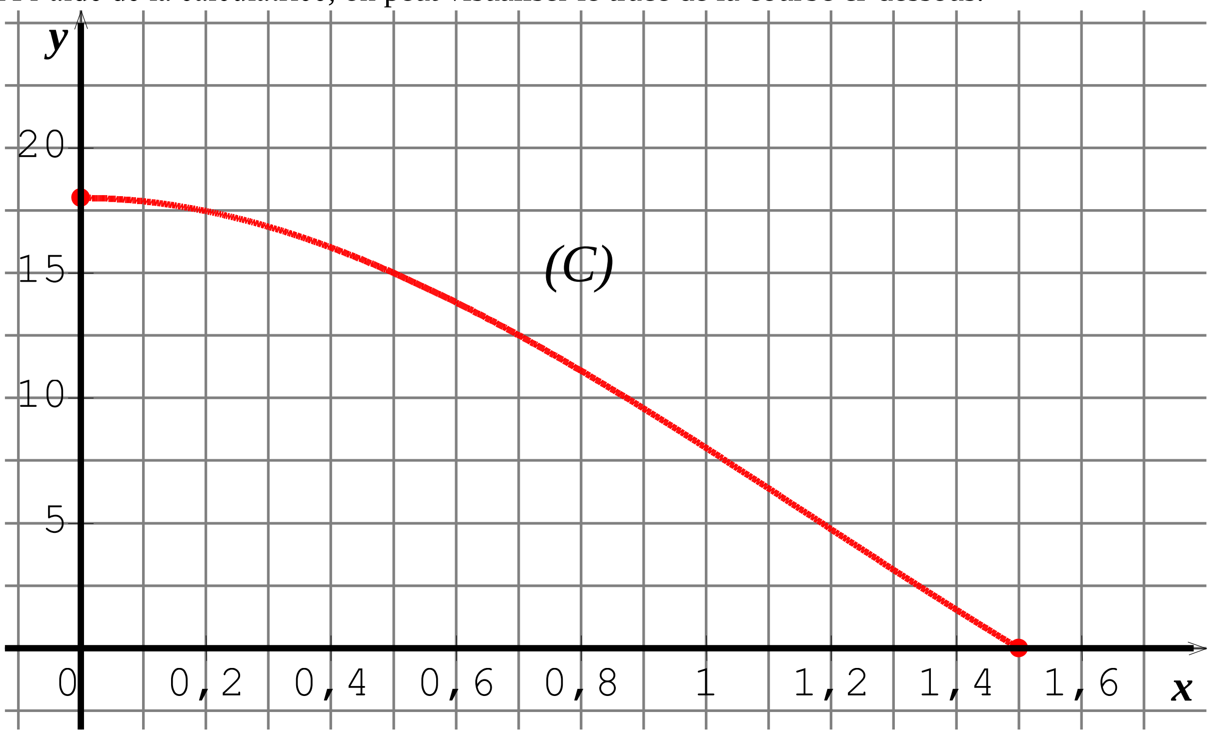
Soit $f(x) = 4x^3 - 14x^2 + 18$ définie sur $[0;1,5]$.

1) a) $f(0) = 18$ millions de bactéries présentes au début de l'expérience.

b) $f(1,5) = 4 \times 1,5^3 - 14 \times 1,5^2 + 18 = 0$.

Une heure et demie après le début de l'expérience, il n'y a plus aucune bactérie.

2) a) A l'aide de la calculatrice, on peut visualiser le tracé de la courbe ci-dessous.



On peut conjecturer que la fonction *f* semble être strictement décroissante sur $[0;1,5]$.

(l'utilisation du tableur permet aussi de faire cette conjecture)

b) Ainsi, au cours de la durée de cette expérience, le nombre de bactéries semble diminuer.

Partie B

Soit $f(x)=4x^3-14x^2+18$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) a) f est une fonction polynôme. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=12x^2-28x$

b) En factorisant, on obtient $f'(x)=12x^2-28x=4x(3x-7)$.

Posons $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x=0$ ou $3x-7=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\dfrac{7}{3}$

x	$-\infty$		0		$\dfrac{7}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	18	$\searrow$	$\approx -7,41$	$\nearrow$	

$$f\left(\frac{7}{3}\right)=4\times\left(\frac{7}{3}\right)^3-14\times\left(\frac{7}{3}\right)^2+18=-\frac{200}{27}\approx -7,41$$

2) a) $T: y=f'(a)(x-a)+f(a)$ avec $a=1$.

$T: y=f'(1)(x-1)+f(1)$ avec $f'(1)=12\times1^2-28\times1=-16$ et $f(1)=4\times1^3-14\times1^2+18=8$

$T: y=-16(x-1)+8$

$T: y=-16x+16+8$

$T: y=-16x+24$

b) On admet que $f(x)-(-16x+24)=(4x-6)(x^2-2x+1)$.

$$(4x-6)(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow 4x-6=0 \text{ ou } x^2-2x+1=0$$
$$\Leftrightarrow 4x=6 \text{ ou } (x-1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \text{ ou } x-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=1,5 \text{ ou } x=1$$

L'ensemble des solutions de l'équation $(4x-6)(x^2-2x+1)=0$ est $S=\{1,5;1\}$.

c) Tableau de signes

x	$-\infty$		1		$1,5$		$+\infty$
$4x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-2x+1		$+$	0	$+$		$+$	
$(4x-6)(x^2-2x+1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

d) La courbe (C) est au-dessus de la tangente T si et seulement si $f(x)>-16x+24$.

$$f(x)>-16x+24 \Leftrightarrow f(x)-(-16x+24)>0$$
$$\Leftrightarrow (4x-6)(x^2-2x+1)>0$$

D'après le tableau de signes, $(4x-6)(x^2-2x+1)>0$ lorsque $x>1,5$.

On en conclut que la courbe (C) est au-dessus de la tangente T sur l'intervalle $]1,5;+\infty[$.