Devoir Commun de Mathématiques
1ère Générale

Mardi 17 mai 2022
Durée de l'épreuve : 1h50

NOM :

Prénom :

Groupe :

Exercice 1 :	/ 10
Exercice 2 :	/ 10
Exercice 3 :	/ 9
Exercice 4 :	/ 11
TOTAL :	/ 40

La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le sujet comporte quatre exercices indépendants.
Le sujet est à rendre avec la copie.
La calculatrice est personnelle et doit être en mode EXAMEN. Vous ne pouvez donc pas la prêter.

<u>Exercice 1</u> : Suites ***(10 points)***

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Un arbre planté en janvier 2000 après la tempête de décembre 1999 mesurait 2 mètres. Il a grandi depuis de 50 centimètres par an. On note T_0 sa taille en centimètres à la plantation en janvier 2000, donc $T_0 = 200$, et T_n sa taille au bout de *n* années de plantation en centimètres.

1) a) Quelle est la nature de la suite (T_n) ? préciser sa raison.

b) En déduire l'expression de T_n en fonction de *n*.

2) En quelle année l'arbre dépassera-t-il 35 mètres si sa croissance se poursuit de la même façon ? Détailler votre démarche en utilisant la question 1.

3) Déterminer quelle sera la hauteur de l'arbre en 2089 au moment de son abattage (on suppose encore que sa croissance se poursuit de la même façon). Détailler votre démarche, en particulier le lien avec la suite.

Partie B

Un compte bancaire contient au départ 6000 euros et chaque année sa valeur est multipliée par 1,05.
On note C_0 le montant en euros contenu dans le compte au départ et C_n le montant en euros contenu dans le compte au bout de *n* années.

1) a) Quelle est la nature de la suite (C_n) ? préciser sa raison.

b) En déduire l'expression de C_n en fonction de *n*.

2) Déterminer le montant contenu dans le compte au bout de 50 années. *On arrondira si besoin à 0,01 près.*

3) Déterminer au bout de combien d'années le contenu du compte dépassera pour la première fois les 50 000 euros. Pour justifier que c'est la première fois, on donnera également le montant juste avant ce dépassement. On arrondira si besoin à 0,01 près.

Partie C

En 1772 le grand mathématicien Leonhard Euler a découvert dans ses recherches la suite (P_n) définie pour tout entier naturel *n* par $P_n = n^2 + n + 41$.
Cette suite a pour particularité que ses 40 premiers termes sont tous des nombres premiers.

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite (P_n).

2) La suite (P_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? justifier les réponses.

<u>Exercice 2</u> : Probabilités ***(10 points)***

Dans la ville de New York, une nouvelle forme de grippe a fait son apparition.

Dans un premier temps, les autorités décident de lancer une étude et de faire effectuer des tests de dépistage aux habitants, afin d'identifier les malades. C'est l'objet de la **partie A**.

Dans un second temps, les autorités mettent en place des mesures sanitaires afin de soigner les malades, à l'aide d'un vaccin. C'est l'objet de la **partie B**.

Vous pouvez traiter les deux parties dans l'ordre que vous le souhaitez, car elles sont indépendantes.

Partie A : Mise en place de tests de dépistage

On étudie l'efficacité d'un test de dépistage à cette nouvelle forme de la grippe sur une population composées d'habitants de New York rencontrés au hasard.

On estime que 25 % de cette population est malade.

Le test, effectué sur l'ensemble de la population, donne les résultats suivants :

- Si l'habitant est malade, le test est positif dans 98 % des cas.
- Si l'habitant n'est pas malade, le test est négatif dans 96 % des cas.

On rencontre un habitant de New York au hasard.

Tous les habitants de New York ont la même probabilité d'être rencontrés.

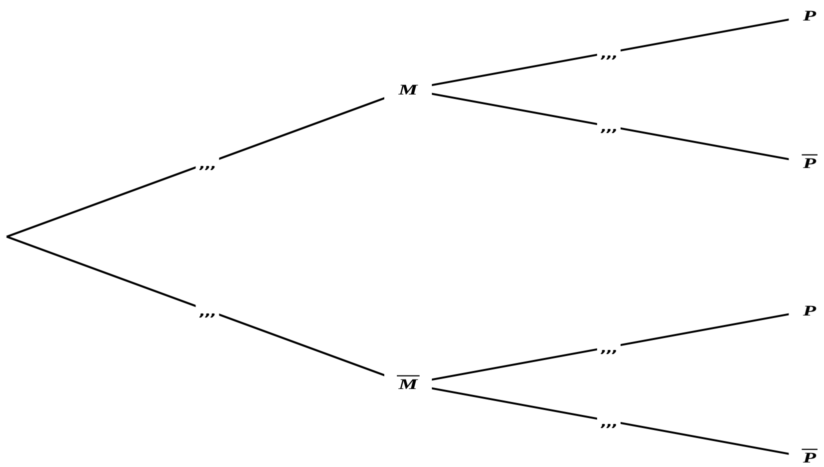
On considère les événements suivants :

M : « l'habitant rencontré est malade ».

P : « le test est positif ».

1) A partir des informations figurant dans l'énoncé, donner les probabilités $p(M)$, $p_M(P)$ et $p_{\overline{M}}\left(\overline{P}\right)$.

2) Compléter l'arbre pondéré suivant, en indiquant les probabilités sur les branches.



3) Déterminer la probabilité que l'habitant rencontré soit malade et que le test soit positif.

4) Montrer que $p(P) = 0,275$ et interpréter ce résultat.

5) Déterminer la probabilité que le test donne un bon diagnostic.

6) Sachant que le test est négatif, déterminer la probabilité que l'habitant rencontré soit malade.

   On arrondira à 0,001 près.

Partie B : Mise en place de mesures sanitaires

À la suite de l'apparition de cette nouvelle forme de grippe, les autorités prennent rapidement des mesures sanitaires, et vaccinent les habitants de la ville.

On étudie ensuite l'efficacité de ce vaccin auprès de 2500 habitants de New York qui étaient malades et qui ont été vaccinés. Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Habitants de moins de 25 ans	Habitants entre 26 et 59 ans	Habitants de plus de 60 ans	Total
Habitants qui sont restés malades après l'injection du vaccin	141	186	153	480
Habitants qui ont été guéris après l'injection du vaccin	411	842	767	2020
Total	552	1028	920	2500

Dans cette partie, les résultats seront donnés sous forme décimale.

On rencontre au hasard un habitant parmi l'un des 2500 habitants de l'étude.

Chacun d'entre eux a la même probabilité d'être rencontré.

On considère les événements suivants :

G : « l'habitant rencontré a été guéri après l'injection du vaccin ».

A : « l'habitant rencontré a plus de 60 ans ».

1) a) Calculer la probabilité de l'événement G.

   b) Calculer la probabilité de l'événement A.

2) Définir à l'aide d'une phrase l'événement $G \cap A$ puis déterminer sa probabilité.

3) L'habitant a été guéri après l'injection du vaccin.
   Calculer la probabilité que cet habitant ait plus de 60 ans. *On arrondira à 0,01 près.*

<u>Exercice 3</u> : Produit scalaire *(9 points)*

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère un triangle ABC tel que $AB = 6$, $AC = 9$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ radians.

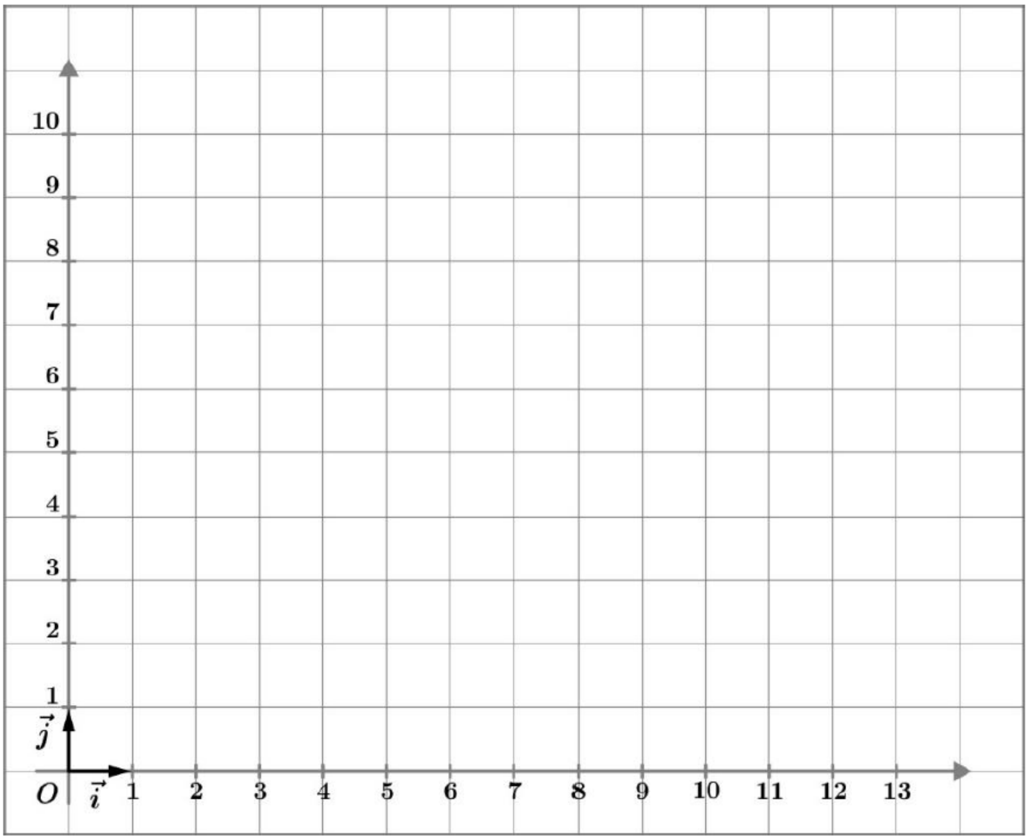
1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$. (On pourra utiliser $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$)

Partie B

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(2;6)$, $B(12;1)$ et $C(12;6)$.

1) Placer les points A, B et C dans le repère ci-dessous.



2) a) Calculer les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 25$.

c) Montrer que $AB = 5\sqrt{5}$ et $BC = 5$.

d) En utilisant la définition du produit scalaire de deux vecteurs, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.

e) En déduire la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ arrondie à 0,1° près.

Partie C

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1-m\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m-3\\m+5\end{pmatrix}$ où m est un nombre réel.

1) Montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -m^2 + 6m + 7$.

2) Existe-t-il une (ou des) valeur(s) de m pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ? justifier.
Si c'est le cas, déterminer la (ou les) valeurs de m telle(s) que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

<u>Exercice 4</u> : Fonctions ***(11 points)***

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Observation de l'expérience

On réalise une expérience qui consiste à mesurer l'efficacité d'un produit biologique destiné à l'élimination d'une population de bactéries présentes dans un milieu liquide, sur une période de 1 heure et demie.
L'évolution de cette population est modélisée par la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0;1,5]$ par :
$f(x)=4x^3-14x^2+18$
où *x* représente le temps écoulé après le début de l'expérience exprimé en heures, et $f(x)$ le nombre de bactéries exprimé en millions.

1) a) Déterminer le nombre de bactéries présentes au début de l'expérience.
   b) Calculer $f(1,5)$ puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

2) a) En expliquant votre démarche, conjecturer le sens de variation de *f* sur l'intervalle $[0;1,5]$.
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : Etude de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$

Dans cette partie, on considère à nouveau la fonction *f* définie par $f(x)=4x^3-14x^2+18$ que l'on étudiera sur $\mathbb{R}$.
On note (C) la courbe représentative de *f* dans un repère du plan.

1) Etude du sens de variation de *f*.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens de variation de la fonction *f* sur $]-\infty;+\infty[$.
   (dresser le tableau de variation de *f* avec ses extremums locaux en arrondissant les valeurs à 10^{-2} près si nécessaire)

2) On considère la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
   a) Montrer que l'équation réduite de la droite T est $y=-16x+24$.
   b) On admet que $f(x)-(-16x+24)=(4x-6)(x^2-2x+1)$.
   Résoudre l'équation $(4x-6)(x^2-2x+1)=0$.
   c) Etudier le signe de $(4x-6)(x^2-2x+1)$ en complétant le tableau de signe ci-dessous.

x	$-\infty$ $+\infty$
$4x-6$	
x^2-2x+1	
$(4x-6)(x^2-2x+1)$	

   d) En expliquant votre démarche, déterminer le (ou les) intervalle(s) sur le(s) quel(s) la courbe (C) est au-dessus de la tangente T.