A eu lieu le mardi 18 janvier 2022

Correction du devoir commun sujet A

Exercice 1 :

Partie A :

1. $\boxed{\text{réponse (b)}}$ $\quad x \in]-\infty; 3[\Longleftrightarrow x < 3$

2. $\boxed{\text{réponse (c)}}$ $\quad 19 \notin I = [4; 19[$ et $19 \notin J =]-8; 5[$

Partie B :

1. Le plus petit ensemble de nombres auquel 1,2 appartient est $\mathbb{D}$. On a $1{,}2 \notin \mathbb{Z}$.

2. Le plus petit ensemble de nombres auquel $\frac{20}{12}$ appartient est $\mathbb{Q}$. On a $\frac{20}{12} = 1 + \frac{2}{3} \notin \mathbb{D}$.

3. Le plus petit ensemble de nombres auquel $\frac{\sqrt{3}}{5}$ appartient est $\mathbb{R}$. On a $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

4. Le plus petit ensemble de nombres auquel $-\sqrt{16}$ appartient est $\mathbb{Z}$. On a $-\sqrt{16} = -4$ et $-4 \notin \mathbb{N}$.

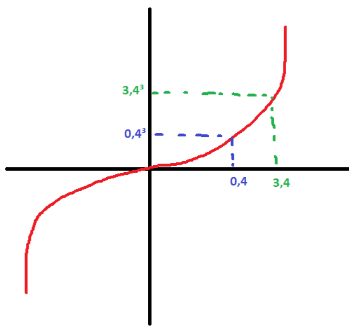
Exercice 2 :

1. L'image de $\frac{-3}{5}$ par la fonction carré est $\left(\frac{-3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$. (Ou $(-0{,}6)^2 = 0{,}36$.)

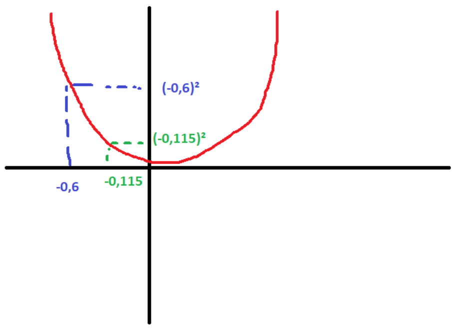
2. Les antécédents de 64 par la fonction carré sont 8 et -8 car on a $(-8)^2 = 8^2 = 64$.

3. L'image de -3 par la fonction carré est $\boxed{(-3)^3 = -27}$.

4.



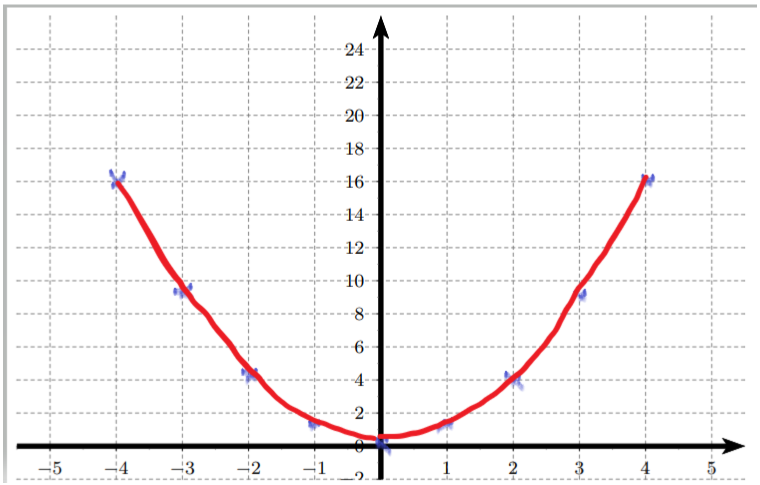
donc $\boxed{0{,}4^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 < 3{,}4^3}$.



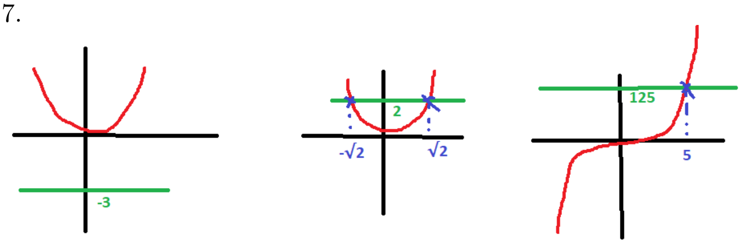
donc $\boxed{(-0{,}6)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 > (-0{,}115)^2}$.

5. La courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère, on dit que la fonction cube est impaire.

6.



7.



a. Il n'y a <u>pas de solutions</u> car la droite horizontale ne coupe pas la parabole.

b. On a $(-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$. Les abscisses des points de la parabole sous la droite horizontale sont les solutions $\boxed{x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]}$.

c. On a $5^3 = 125$. La droite horizontale coupe une seule fois la courbe, il y a une seule solution $\boxed{x = 5}$.

<u>Exercice 3</u> :

1. (a) On a $A = 4x(2x+1) = 8x^2 + 4x$ et $B = (2x+1)(x-5) = 2x^2 - 10x + x - 5 = 2x^2 - 9x - 5$ donc

$$A + B = (8x^2 + 4x) + (2x^2 - 9x - 5) = 10x^2 - 5x - 5$$

1. (b) On a $A+B = 10x^2 - 5x - 5$ et si $x = -1$ on a $A+B = 10x^2 - 5x - 5 = 10 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) - 5 = 10 + 5 - 5 = \boxed{10}$.

1. (c) On a $A = 4x(2x+1)$ et $B = (2x+1)(x-5)$. Un facteur commun est $(2x+1)$ donc

$$A - B = 4x(2x+1) - (2x+1)(x-5) = (2x+1)\Big((4x) - (x-5)\Big) = (2x+1)(4x - x + 5) = (2x+1)(3x+5)$$

1. (d) Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc

$$\begin{aligned}(2x+1)(3x+5) = 0 &\iff 2x+1 = 0 \text{ ou } 3x+5 = 0\\ &\iff 2x = -1 \quad \text{ ou } 3x = -5\\ &\iff x = \frac{-1}{2} \quad \text{ ou } \; x = \frac{-5}{3}\end{aligned}$$

Conclusion : On sait que $A - B = 0$ équivaut à $A = B$ donc les expressions A et B sont égales si et seulement si $x = \dfrac{-1}{2}$ ou $x = \dfrac{-5}{3}$.

2. On remarque que $1001 = 1000 + 1$ et on utilise l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ainsi

$$C^2 = 1001^2 = (1000+1)^2 = 1000^2 + 2 \times 1000 \times 1 + 1^2 = 1\,000\,000 + 2000 + 1 = \boxed{1\,002\,001}$$

3. On utilise l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ et $(\sqrt{7})^2 = 7$ ainsi

$$D = (\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 11) = (\sqrt{7})^2 - 1^2 = 7 - 1 = \boxed{6}$$

on a $D = 6$ et 6 est bien un nombre entier.

4. On utilise $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ qui est vraie pour tous les nombres $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. On a

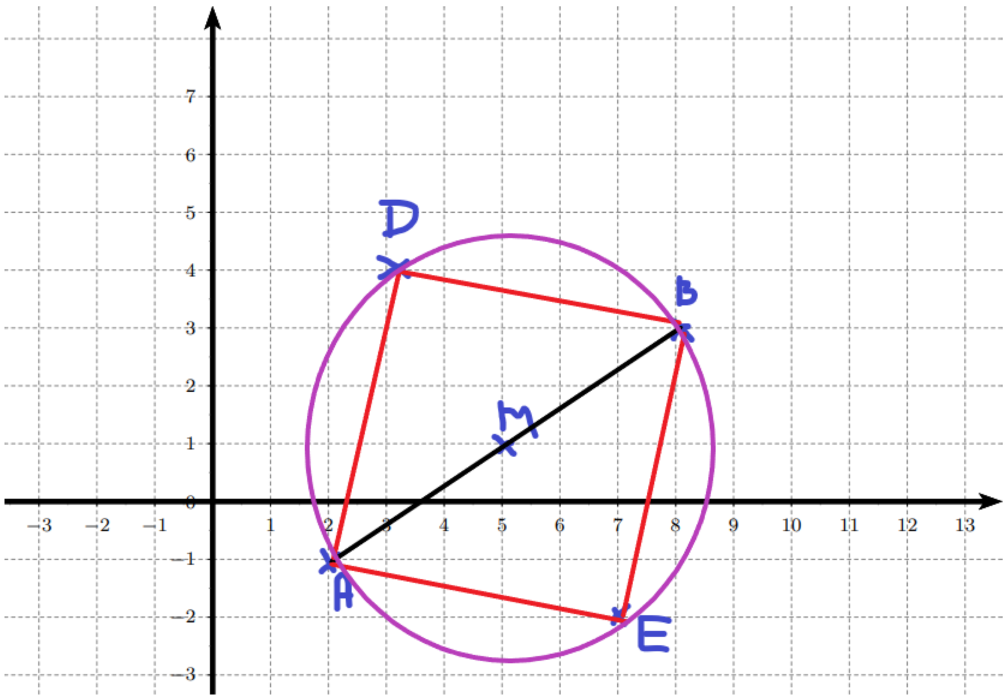
$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ et } \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

et donc

$$E = 3\sqrt{2} - \sqrt{50} + 2\sqrt{18} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 2 \times 3\sqrt{2} = (3 - 5 + 2 \times 3)\sqrt{2} = \boxed{4\sqrt{2}}$$

résultat qui est bien de la forme $a\sqrt{b}$ avec $a = 4$ et $b = 2$. Le seul entier plus petit que 2 étant 1 et puisque $\sqrt{1} = 1$, $b = 2$ est bien le nombre entier le plus petit possible tel que le résultat s'écrive $a\sqrt{b}$.

Exercice 4 :



1. On a $A(2;-1)$, $B(8;3)$. Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ c'est-à-dire $\left(\dfrac{2+8}{2}; \dfrac{-1+3}{2}\right)$ et ainsi $\boxed{M(5;1)}$.

2. On a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8-2)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$
et puisque $52 = 4 \times 13$ on a $\sqrt{52} = \sqrt{4} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$.

3. (a) Le diamètre du cercle vaut la longueur de $[AB]$ soit $2\sqrt{13}$ d'après la question 2. Le rayon vaut la moitié du diamètre soit $\sqrt{13}$.

3. (b) On a $M(5;1)$ et $D(3;4)$ donc $MD = \sqrt{(x_D - x_M)^2 + (y_D - y_M)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Donc D appartient au cercle de centre M est de rayon $\sqrt{13}$ et ce cercle est $(\mathcal{C})$ car M est le milieu du diamètre du cercle $(\mathcal{C})$.

4. (a) On a $D(3;4)$ et $B(8;3)$.

On a $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} x_B - x_D \\ y_B - y_D \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 8-3 \\ 3-4 \end{pmatrix}$ et ainsi $\boxed{\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

4. (b) On a $A(2;-1)$ et $E(x_E; y_E)$ avec x_E et y_E deux nombres à déterminer.

On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - 2 \\ y_E - (-1) \end{pmatrix}$ et ainsi $\boxed{\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - 2 \\ y_E + 1 \end{pmatrix}}$.

Or $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AE}$ donc les coordonnées sont égales, on a

$$\begin{aligned} x_E - 2 = 5 \quad &\text{et} \quad y_E + 1 = -1 \\ x_E = 5 + 2 \text{ et} \quad &\quad y_E = -1 - 1 \\ x_E = 7 \quad &\text{et} \quad y_E = -2 \end{aligned}$$

donc $\boxed{E(7;-2)}$.

5. On a $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AE}$ donc par le cours le quadrilatère nommé $DBEA$ est un parallélogramme.

D'après le rappel le triangle ADB est rectangle car D appartient au cercle de diamètre $[AB]$ par la question 3 (b).

Donc le quadrilatère $DBEA$ est un parallélogramme qui possède un angle droit, c'est donc un rectangle.

Pour prouver que c'est un carré il reste à montrer que la longueur du rectangle est égale à sa largeur. Montrons que $AD = DB$.
Puisque $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ on a $DB = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$ et $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$. Ce qui termine de prouver que le quadrilatère $DBEA$ est un carré. On remarque sur la figure que ce carré peut également se nommer $ADBE$.

Exercice 5 :

1.

	x	a	y
Donner la valeur de x	7		
a prend la valeur $x-4$	7	7-4=3	
y prend la valeur a^2	7	3	3^2=9
y prend la valeur $y+3$	7	3	9+3=12
Affichage : 12			

	x	a	y
Donner la valeur de x	-1		
a prend la valeur $x-4$	-1	-1-4=-5	
y prend la valeur a^2	-1	-5	$(-5)^2$=25
y prend la valeur $y+3$	-1	-5	25+3=28
Affichage : 28			

2.

	x	a	y
Donner la valeur de x	x		
a prend la valeur $x-4$	x	(x-4)	
y prend la valeur a^2	x	(x-4)	$(x-4)^2$
y prend la valeur $y+3$	x	(x-4)	$(x-4)^2$+3
Affichage : $(x-4)^2$+3			

on obtient $\boxed{(x-4)^2+3}$

3. On utilise l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ainsi $(x-4)^2 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$ et donc $(x-4)^2 + 3 = x^2 - 8x + 16 + 3 = x^2 - 8x + 19$. Donc l'affirmation faite par Céline est vraie.

Exercice 6 :

1. $\boxed{\text{réponse (a)}}$ $360 - 135 = 225$ adhérents ont choisi la couleur verte sur un total de 360 personnes soit une proportion de $\dfrac{225}{360} = 0{,}625$.

2. $\boxed{\text{réponse (a)}}$ Notons b le budget. On sait que $0{,}6b = 13500$ donc $b = \dfrac{13500}{0{,}6} = 22500$.

3. $\boxed{\text{réponse (b)}}$ on a $0{,}35 \times 0{,}4 = 0{,}14$.

4. $\boxed{\text{réponse (d)}}$ le coefficient multiplicateur de cette évolution est $c = \dfrac{200}{1500} = \dfrac{2}{15}$ soit un taux d'évolution de $(c-1) \times 100\%$ c'est-à-dire $-\dfrac{260}{3}\% = -86{,}66666....\%$.