Correction du devoir commun sujet B

Exercice 1 :

Partie A :

1. $\boxed{\text{réponse (c)}}$ $\quad x \in]-\infty; 5[\Longleftrightarrow x < 5$

2. $\boxed{\text{réponse (a)}}$ $\quad 15 \notin I =]-\infty; 7[$ et $15 \notin J =]4; 15[$

Partie B :

1. Le plus petit ensemble de nombres auquel $-\sqrt{25}$ appartient est $\mathbb{Z}$. On a $-\sqrt{25} = -5$ et $-5 \notin \mathbb{N}$.

2. Le plus petit ensemble de nombres auquel $\frac{\sqrt{2}}{5}$ appartient est $\mathbb{R}$. On a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3. Le plus petit ensemble de nombres auquel $\frac{8}{12}$ appartient est $\mathbb{Q}$. On a $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} \notin \mathbb{D}$.

4. Le plus petit ensemble de nombres auquel 1,5 appartient est $\mathbb{D}$. On a $1{,}5 \notin \mathbb{Z}$.

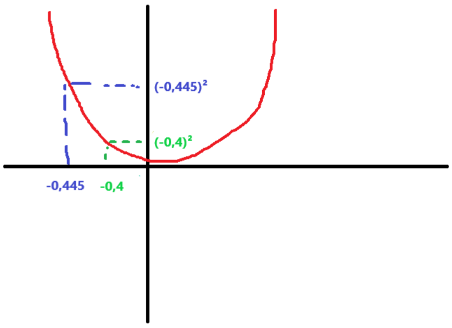
Exercice 2 :

1. L'image de $\frac{-4}{5}$ par la fonction carré est $\left(\frac{-4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$. (Ou $(-0{,}8)^2 = 0{,}64$.)

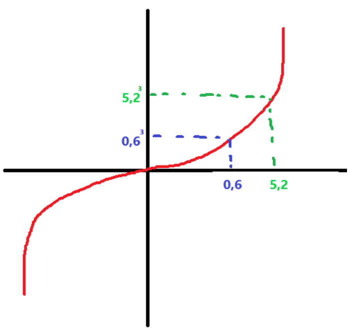
2. Les antécédents de 49 par la fonction carré sont 7 et -7 car on a $(-7)^2 = 7^2 = 49$.

3. L'image de -2 par la fonction carré est $\boxed{(-2)^3 = -8}$.

4.



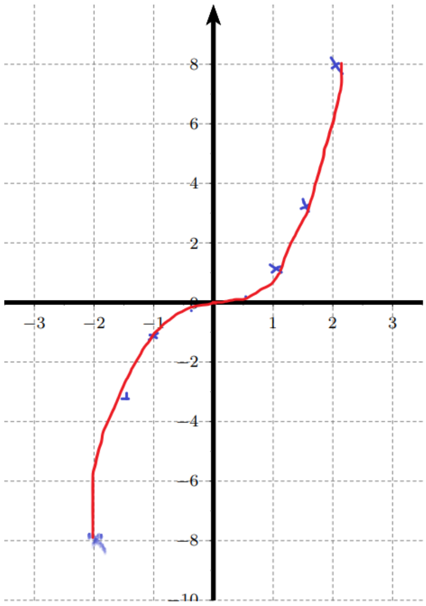
donc $\boxed{(-0{,}4)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 < (-0{,}445)^2}$.



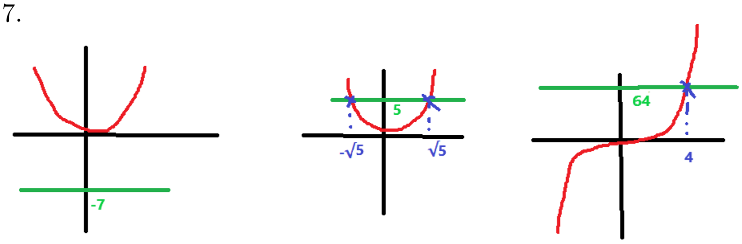
donc $\boxed{0{,}6^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 < 5{,}2^3}$.

5. La courbe représentative de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on dit que la fonction carré est paire.

6.



7.



a. Il n'y a pas de solutions car la droite horizontale ne coupe pas la parabole.

b. On a $(-\sqrt{5})^2 = (\sqrt{5})^2 = 2$. Les abscisses des points de la parabole qui sont au dessus la droite horizontale sont les solutions. Sur l'axe des abscisses il y a une partie des solutions à gauche et une autre partie à droite. $\boxed{x \in]-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty[}$.

c. On a $4^3 = 64$. La droite horizontale coupe une seule fois la courbe, il y a une seule solution $\boxed{x = 4}$.

Exercice 3 :

1. (a) On a $A = 5x(3x+4) = 15x^2 + 20x$ et $B = (3x+4)(x-2) = 3x^2 - 6x + 4x - 8 = 3x^2 - 2x - 8$ donc

$$A + B = (15x^2 + 20x) + (3x^2 - 2x - 8) = 18x^2 + 18x - 8$$

1. (b) On a $A+B = 18x^2+18x-8$ et si $x = -1$ on a $A+B = 18x^2+18x-8 = 18\times(-1)^2+18\times(-1)-8 = 18-18-8 = \boxed{-8}$.

1. (c) On a $A = 5x(3x+4)$ et $B = (3x+4)(x-2)$. Un facteur commun est $(3x+4)$ donc

$$A - B = 5x(3x+4) - (3x+4)(x-2) = (3x+4)\Big((5x) - (x-2)\Big) = (3x+4)(5x - x + 2) = (3x+4)(4x+2)$$

1. (d) Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc

$$\begin{aligned}(3x+4)(4x+2) = 0 &\iff 3x+4 = 0 \text{ ou } 4x+2 = 0\\ &\iff 3x = -4 \quad \text{ ou } 4x = -2\\ &\iff \ x = \frac{-4}{3} \quad \text{ ou } \ x = \frac{-2}{4}\end{aligned}$$

Conclusion : On sait que $A - B = 0$ équivaut à $A = B$ donc les expressions A et B sont égales si et seulement si $x = \dfrac{-4}{3}$ ou $x = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$.

2. On remarque que $999 = 1000 - 1$ et on utilise l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ainsi

$$C^2 = 999^2 = (1000-1)^2 = 1000^2 - 2\times1000\times1 + 1^2 = 1\,000\,000 - 2000 + 1 = \boxed{998\,001}$$

3. On utilise l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ et $(\sqrt{5})^2 = 5$ ainsi

$$D = (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = \boxed{1}$$

on a $D = 1$ et 1 est bien un nombre entier.

4. On utilise $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ qui est vraie pour tous les nombres $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. On a

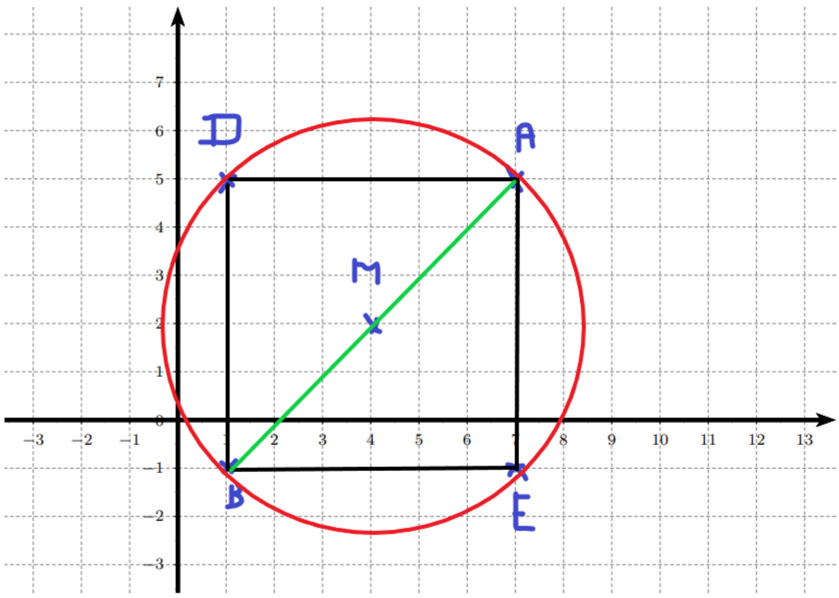
$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ et } \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

et donc

$$E = \sqrt{12} + 5\sqrt{27} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 5 \times 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = (2 + 5 \times 3 - 1)\sqrt{2} = \boxed{16\sqrt{3}}$$

résultat qui est bien de la forme $a\sqrt{b}$ avec $a = 16$ et $b = 3$. Les seuls entiers plus petits que 3 sont 1 et 2. Puisque $\sqrt{1} = 1$ et que l'égalité $\sqrt{3} = c\sqrt{2}$ avec c un nombre entier équivaut à $3 = c^2 \times 2$, qui est impossible pour une question de parité, $b = 3$ est bien le nombre entier le plus petit possible tel que le résultat s'écrive $a\sqrt{b}$.

Exercice 4 :



1. On a $A(7; 5)$, $B(1; -1)$. Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ c'est-à-dire $\left(\dfrac{7+1}{2}; \dfrac{5+(-1)}{2}\right)$ et ainsi $\boxed{M(4; 2)}$.

2. On a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-7)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{72}$
et puisque $72 = 36 \times 2$ on a $\sqrt{72} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

3. (a) Le diamètre du cercle vaut la longueur de $[AB]$ soit $6\sqrt{2}$ d'après la question 2. Le rayon vaut la moitié du diamètre soit $3\sqrt{2}$.

3. (b) On a $M(4; 2)$ et $D(1; 5)$ donc $MD = \sqrt{(x_D - x_M)^2 + (y_D - y_M)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Donc D appartient au cercle de centre M est de rayon $3\sqrt{2}$ et ce cercle est $(\mathcal{C})$ car M est le milieu du diamètre du cercle $(\mathcal{C})$.

4. (a) On a $D(1; 5)$ et $B(1; -1)$.

On a $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} x_B - x_D \\ y_B - y_D \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 1-1 \\ -1-5 \end{pmatrix}$ et ainsi $\boxed{\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}}$.

4. (b) On a $A(7; 5)$ et $E(x_E; y_E)$ avec x_E et y_E deux nombres à déterminer.

On a $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} x_E - 7 \\ y_E - 5 \end{pmatrix}}$.

Or $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AE}$ donc les coordonnées sont égales, on a

$$\begin{array}{ccc} x_E - 7 = 0 & \text{et} & y_E - 5 = -6 \\ x_E = 7 \text{ et} & & y_E = -6 + 5 \\ x_E = 7 & \text{et} & y_E = -1 \end{array}$$

donc $\boxed{E(7; -1)}$.

5. On a $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AE}$ donc par le cours le quadrilatère nommé $DBEA$ est un parallélogramme.

D'après le rappel le triangle ADB est rectangle car D appartient au cercle de diamètre $[AB]$ par la question 3 (b).

Donc le quadrilatère $DBEA$ est un parallélogramme qui possède un angle droit, c'est donc un rectangle.

Pour prouver que c'est un carré il reste à montrer que la longueur du rectangle est égale à sa largeur. Montrons que $AD = DB$.
Puisque $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$ on a $DB = \sqrt{0^2+(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$ et $AD = \sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2} = \sqrt{(1-7)^2+(5-5)^2} = \sqrt{(-6)^2+0^2} = \sqrt{36} = 6$. Ce qui termine de prouver que le quadrilatère $DBEA$ est un carré. On remarque sur la figure que ce carré peut également se nommer $ADBE$.

Autre méthode :
Les points D et A ont la même ordonnée donc la droite (DA) est parallèle à l'axe des abscisses. De la même manière la droite (BE) est parallèle à l'axe des abscisses.
Les points D et B ont la même abscisse donc la droite (DB) est parallèle à l'axe des ordonnées. De la même manière la droite (AE) est parallèle à l'axe des ordonnées.
Puisqu'ici l'axe des ordonnées est perpendiculaire à l'axe des abscisses, la droite (DA) est perpendiculaire à (DB). De même la droite (BE) est perpendiculaire à (AE). Ce qui prouve que le quadrilatère ADBE est un rectangle.

Les points D et A ont la même ordonnée donc $DA = 7 - 1 = 6$.
Les points D et B ont la même abscisse donc $DB = 5 - (-1) = 6$.
Donc la largeur et la longueur du rectangle ADBE sont égales, ce qui prouve que c'est un carré.

Exercice 5 :

1.

	x	a	y
Donner la valeur de x	4		
a prend la valeur $x-3$	4	4-3=1	
y prend la valeur a^2	4	1	1^2=1
y prend la valeur $y+5$	4	1	1+5=6
Affichage : 6			

	x	a	y
Donner la valeur de x	-2		
a prend la valeur $x-3$	-2	-2-3=-5	
y prend la valeur a^2	-2	-5	$(-5)^2$=25
y prend la valeur $y+5$	-2	-5	25+5=30
Affichage : 30			

2.

	x	a	y
Donner la valeur de x	x		
a prend la valeur $x-3$	x	x-3	
y prend la valeur a^2	x	x-3	$(x-3)^2$
y prend la valeur $y+5$	x	x-3	$(x-3)^2+5$
Affichage : $(x-3)^2+5$			

on obtient $\boxed{(x-3)^2+5}$

3. On utilise l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ainsi $(x-3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$ et donc $(x-3)^2 + 5 = x^2 - 6x + 9 + 5 = x^2 - 6x + 14$. Donc l'affirmation faite par Céline est vraie.

Exercice 6 :

1. $\boxed{\text{réponse (d)}}$ $384 - 144 = 240$ adhérents ont choisi la couleur verte sur un total de 360 personnes soit une proportion de $\frac{240}{384} = 0{,}625$.

2. $\boxed{\text{réponse (c)}}$ Notons b le budget. On sait que $0{,}7b = 14000$ donc $b = \frac{14000}{0{,}7} = 20000$.

3. $\boxed{\text{réponse (d)}}$ on a $0{,}35 \times 0{,}25 = 0{,}0875 = \frac{8{,}75}{100}$.

4. $\boxed{\text{réponse (a)}}$ le coefficient multiplicateur de cette évolution est $c = \frac{600}{1800} = \frac{1}{3}$ soit un taux d'évolution de $(c-1) \times 100\%$ c'est-à-dire $-\frac{200}{3}\% = -66{,}66666....\%$.