Mathématiques **Nom : ....** **TSpécialité 1,2 & 3**
Lycée Jean Calvin - Noyon Janvier 2021

Baccalauréat blanc n°1

Les calculatrices sont autorisées. Le barème prend en compte la rédaction, la qualité de l'expression et la présentation de la copie. Le barème est donné à titre indicatif.

Le sujet est à rendre avec la copie.
Durée : 4h - pas de sortie anticipée

Exercice 1 :	/3
Exercice 2 :	/6
Exercice 3 :	/5
Exercice 4 :	/6
Total :	/20

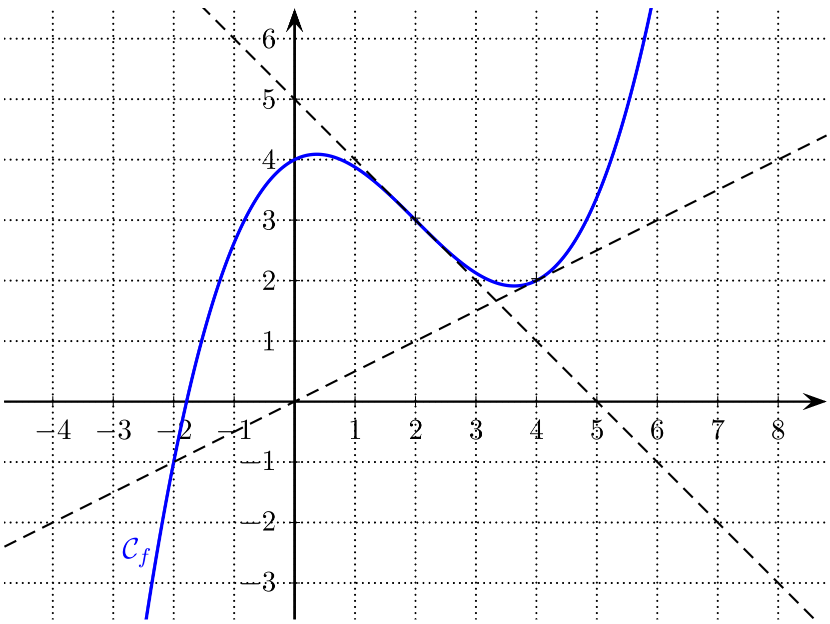
Exercice 1. *(3 points)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte 0.5 point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point. Pour répondre, vous recopierez ***sur votre copie*** *le numéro de la question et indiquerez la seule bonne réponse.*
Le non respect de cette consigne sera pénalisé de 0.5 point.

Les parties A., B. et C. sont indépendantes.

Partie A :

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes aux points d'abscisses respectives 2 et 4.



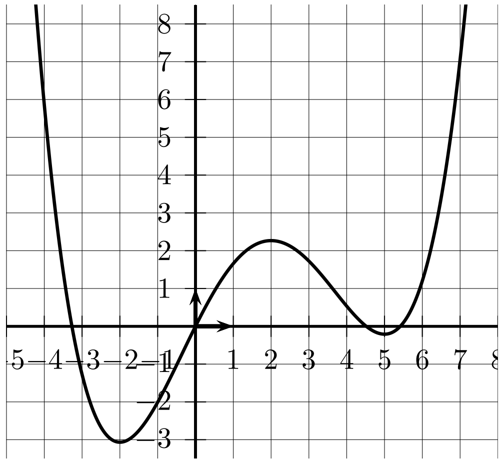
1. $f'(4)$ est égal à :

   (a) 2 (c) $0,5$
   (b) -1 (d) 0

2. f est convexe sur l'intervalle :

   (a) $]-\infty\,;\,2]$ (c) $[0\,;\,4]$
   (b) $]-\infty\,;\,0,5]$ (d) $[2\,;\,5]$

Partie B :

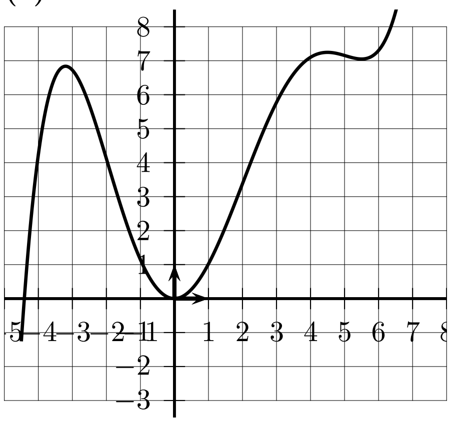


Pour les questions 3 et 4, on donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.

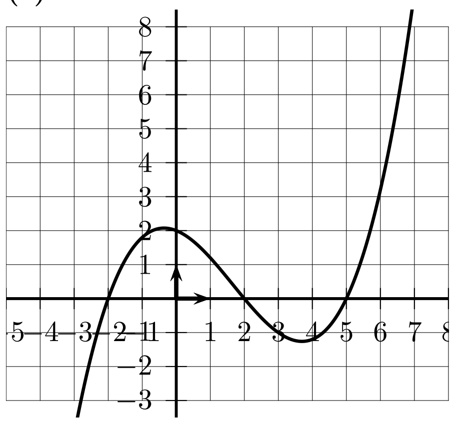
3. Soit g' la dérivée de g sur $\mathbb{R}$.
   (a) g' est positive sur [2 ; 4].
   (b) g' est négative sur [-3 ; -1].
   (c) g' est décroissante sur [2 ; 4].
   (d) g' est décroissante sur [-3 ; -1].

4. Une des courbes ci-dessous représente la fonction g''. Laquelle ?

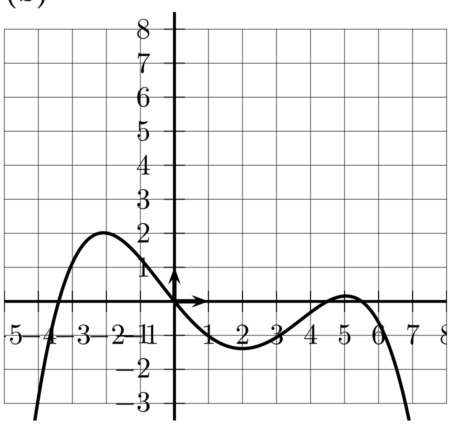
(a)



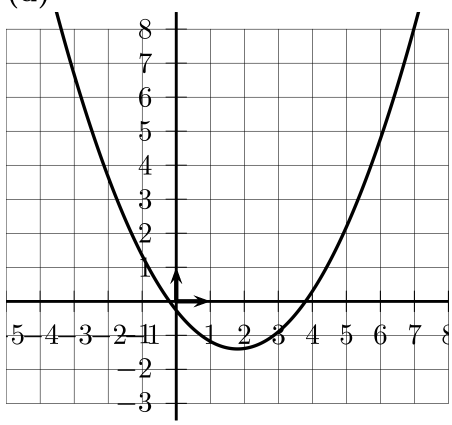
(c)



(b)



(d)



Partie C :

Soit h la fonction définie sur $[-1;4]$ par $h(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ et soit $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.

5. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

   (a) $y = -3x^2 + 6x$
   (b) $y = 3x - 2$
   (c) $y = 3x - 3$
   (d) $y = 2x - 1$

6. Laquelle de ces limites est correcte ?

   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$
   (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -1$
   (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$
   (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

Exercice 2. *(6 points)*

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E−05
8	6	3,337 9E−06
9	7	4,172 3E−07
10	8	5,215 4E−08
11	9	6,519 3E−09
12	10	8,149 1E−10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?
2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n)
4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$.
   En utilisant la calculatrice, déterminer la valeur de n_0. Justifier.

Exercice 3. *(5 points)*

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (-2x + 30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$.

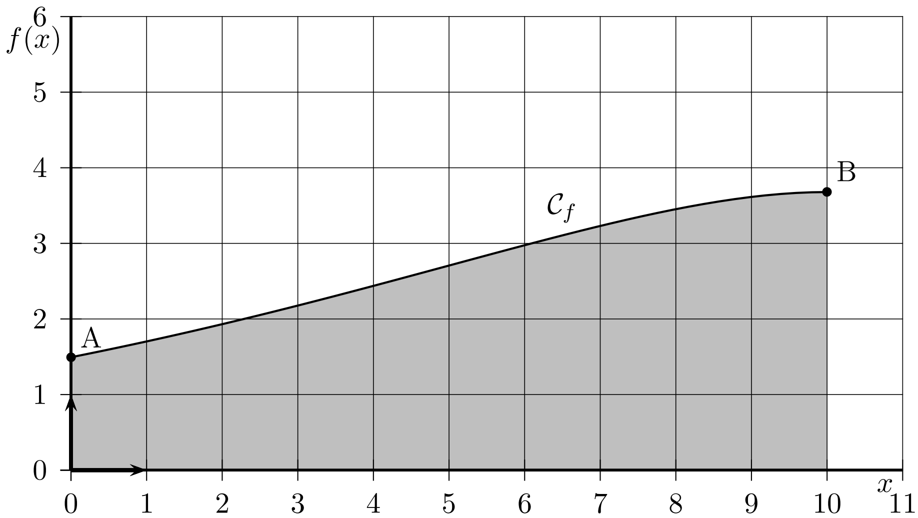
1. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{0,2x-3} = \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X}$.
   Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$
2. (a) Montrer que $f'(x) = (-0,4x + 4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Dresser le tableau de variation complet de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On précisera les valeurs exactes des images calculées pour ce tableau.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

2	Dériver $(-2x + 30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $(-0,4x + 4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
3	Dériver $(-0,4x + 4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $(-0,08x + 0,4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$

   Étudier la convexité de la fonction f sur son ensemble de définition et préciser l'abscisse des éventuels points d'inflexion. Pour cette question vous pourrez utiliser les résultats du logiciel sans les démontrer.

Partie B

Une station de ski souhaite ouvrir une nouvelle piste au public. Le relief de cette piste est modélisé ci-dessous par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie dans la partie A restreinte à l'intervalle $[0\,;\,10]$. Le point B représente le départ de la nouvelle piste et le point A représente la station de ski où se trouve l'arrivée.



Le réel x représente la distance horizontale, exprimée en km, depuis la station de ski et $f(x)$ représente l'altitude, exprimée en km.

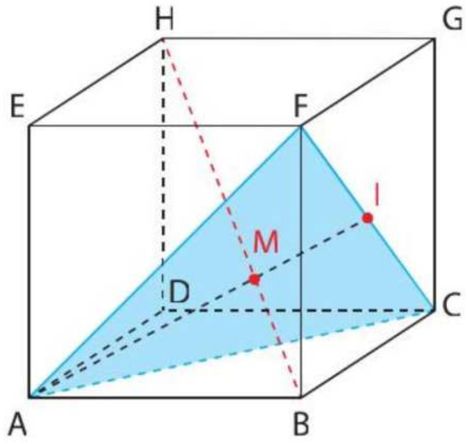
On appelle pente de la piste au point M, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M.

Par exemple, une pente de 15 % en un point de la piste correspond à un coefficient directeur de $\dfrac{15}{100} = 0,15$.

1. On appelle dénivelé d'une piste de ski, la différence d'altitude entre le point de départ et le point d'arrivée de cette piste. Calculer le dénivelé de cette nouvelle piste. On arrondira le résultat au mètre.
2. La station de ski doit déterminer la difficulté de cette nouvelle piste en fonction de la pente.
   — La piste sera classée noire, c'est-à-dire très difficile, si au moins une portion de la piste a une pente supérieure ou égale à 40 %.
   — La piste sera classée rouge, c'est-à-dire difficile, si au moins une portion de la piste a une pente strictement comprise entre 25 % et 40 % (et aucune portion avec une pente supérieure ou égale à 40 %).
   — Si toutes les portions de la piste ont une pente inférieure ou égale à 25 % alors la piste sera classée bleue, c'est-à-dire facile.

   Déterminer le niveau de difficulté de cette nouvelle piste. Justifier la réponse.

Exercice 4. *(6 points)*
Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le milieu du segment $[FC]$. Le point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.



1. **Géométrie vectorielle.**
   (a) Justifier que tout vecteur de l'espace peut être décomposé en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$.
   (b) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BM}$ selon les vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$.
   (c) Montrer que les points M, B et H sont alignés.

2. **Géométrie repérée (1).**
   Pour la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
   (a) Donner sans justifier les coordonnées des points D, E, G et H.
   (b) On admet que $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$ et $F(1;0;1)$.
   Calculer les coordonnées de I puis montrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
   (c) Retrouver le résultat de la question 1c en utilisant les coordonnées.

3. **Géométrie repérée (2).**
   On admet que $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.
   (a) On cherche, s'ils existent, deux réels a et b tels que $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{FM} + b\overrightarrow{AM}$.
   Montrer que cela revient à résoudre le système suivant : $\begin{cases} -a + 2b &= 12 \\ a + b &= 3 \\ -2a + b &= 9 \end{cases}$
   (b) Résoudre le système de la question précédente.
   (c) Soit d la droite passant par H et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
   Déduire de la question précédente la position relative de la droite d et du plan (FMA).
   Justifier précisément.