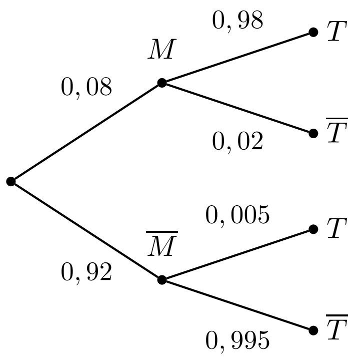
Corrigé - Baccalauréat blanc n°1

Exercice 1 :

Partie A

1. Arbre pondéré :



2. Calcul et interprétation de $P(T \cap M)$:
On a $P(T \cap M) = P(M) \times P_M(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784$
La probabilité que l'élève soit malade et que le test soit positif est de $0,0784$.

3. Calcul de $P(T)$:
M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(M) = P(M \cap T) + P(M \cap \overline{T})$
$P(M) = 0,0784 + 0,92 \times 0,005$
$P(M) = 0,083$.

4. Commercialisation du test :
On cherche $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(M)} = \dfrac{0,0784}{0,083} \approx 0,945 < 0,95$
Cette probabilité est trop faible, le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

1. (a) Loi de X :
L'expérience « Tester un élève du lycée » est une épreuve de Bernoulli de succès « Le test est positif ».
On répète 25 fois cette expérience de façon identiques et indépendantes et X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,103$.

(b) Calcul de $P(X = 3)$:
On a $P(X = 3) = \dbinom{25}{3} \times 0,103^3 \times (1 - 0,103)^{25-3} \approx 0,230$.
La probabilité qu'il y ait 3 tests positifs est de $0,230$.

(c) Calcul de $P(X \geqslant 7)$:
On a $P(X \geqslant 7) = 1 - P(X \leqslant 6) \approx 0,011$
Donc la probabilité qu'au moins 7 des 25 élèves présentent un test positif est de $0,011$.

(d) Calcul de $P(3 \leqslant X \leqslant 10)$:
$P(3 \leqslant X \leqslant 10) = P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 2) \approx 0,483$.

La probabilité qu'il y ait entre 3 et 10 tests positifs parmi les 25 est de $0,483$.

(e) $E(X)$:
On a $E(X) = n \times p = 25 \times 0,103 = 2,575$
L'espérance de X est de $2,575$ ce qui signifie qu'en répétant un très grand nombre de fois l'expérience, il y aura une moyenne de $2,575$ tests positifs dans un groupe de 25 élèves.

2. (a) Traduction du problème :
On a X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,103$.
On veut $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,998 \iff 1 - P(X=0) \geqslant 0,998$
$\iff 1 - \binom{n}{0} \times 0,103^0 \times (1-0,103)^{n-0} \geqslant 0,998$
$\iff 1 - 1 \times 1 \times (1-0,103)^n \geqslant 0,998$
$\iff 1 - 0,897^n \geqslant 0,998$
$\iff -0,897^n \geqslant 0,998 - 1$
$\iff -0,897^n \geqslant -0,002$
$\iff 0,897^n \leqslant 0,002$

(b) Réponse au problème :

A la calculatrice on obtient les résultats ci-contre :

n	$0,897^n$
56	$0,00227 > 0,002$
57	$0,00204 > 0,002$
58	$0,00183 < 0,002$
59	$0,00164 < 0,002$

Le nombre minimum d'élèves à tester pour que la probabilité de l'évènement « au moins un élève contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,998$ est de 58.

Exercice 2 :

Partie A :

1. Tangente (d) :
$f(0) = 0$ car $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine du repère.
$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0. Or cette tangente passe par A et O donc $f'(0) = \dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \dfrac{2-0}{1-0} = 2$
On a $(d) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
Ainsi l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point O est $y = 2x$.

2. Valeur de $f'\left(\sqrt{2}\right)$:
$f'\left(\sqrt{2}\right)$ est le coefficient directeur de la tangente (t). Celle-ci est horizontale donc $f'(\sqrt{2}) = 0$.

3. Point d'inflexion :
f (est continue et) change de convexité, elle admet donc un point d'inflexion compris entre 2 et 3.

Partie B :

1. Variations de f :
f est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables. Elle est de la forme $u \times v$ avec
$$u(x) = x^2 + 2x \qquad u'(x) = 2x + 2$$
$$v(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$
Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^{-x} + (x^2+2x) \times (-\mathrm{e}^{-x})$

$f'(x) = (2x + 2 - x^2 - 2x)$
$f'(x) = (-x^2 + 2)\mathrm{e}^{-x}$
On a $-x^2 + 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

x	0		$\sqrt{2}$		6
$-x^2+2$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$	$\mid$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$(2+2\sqrt{2})\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$	$\searrow$	

2. Expression de $f''(x)$:
   D'après le tableau $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 2x - 2)$

3. Convexité de la fonction f
   $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 8 = 12$
   $x^2 - 2x - 2$ admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{12}}{2 \times 1} = \dfrac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{3}$

x	0		$1+\sqrt{3}$		6
x^2-2x-2		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$	$\mid$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave	$\mid$	convexe	

On retrouve le résultat de la partie A, c'est à dire qu'elle admet bien un point d'inflexion et que son abscisse est égale à $1 + \sqrt{3} \approx 2,73$.

Partie C :

1. Nombre maximal de touristes :
   $\sqrt{2} \approx 1,41$ et $(2 + 2\sqrt{2})\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 1,1739$
   Donc le nombre maximal de touristes présents dans la station balnéaire durant l'été 2021 est d'environ 11739 et la date à laquelle cela a eu lieu est $1,41$ semaines soit environ 10 jours après le $1er$ juillet c-à-d le 11 juillet.

2. Quantité d'eau nécessaire :
   $580000 \div 50 = 11600 < 11739$
   Le jour où la fréquentation est maximale, la commune n'aura pas suffisamment d'eau pour ses touristes.

3. Ralentissement de la décroissance :
   La décroissance va ralentir au bout de $1+\sqrt{3} \approx 2,73$ semaines soit entre la deuxième et la troisième semaine de la saison.

Exercice 3 :

1. Soit X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de ce jeu. La loi de probabilité de X est la suivante :

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = -2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = 0$. Le gain moyen obtenu est donc de 0 euros. $\boxed{\text{Réponse a}}$

2. On a
   — (DK) et (SD)sont confondues ;
   — (AS) et (IC)sont sécantes en A ;
   — (AC) et (SB)sont non coplanaires ;
   — (LM) et (AD)sont parallèles.
   Les droites suivantes ne sont pas coplanaires : $\boxed{\text{Réponse c}}$

3. L'algorithme retourne la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$. $\boxed{\text{Réponse a}}$

Exercice 4 :

Partie A :

1. Calcul de a_1 :
   $a_1 = a_0 - 0,15 \times a_0 + 450 = 620$. Donc en octobre 2021, 620 adhérents ont suivi les cours collectifs.

2. Expression de a_{n+1} en fonction de a_n :
   Diminuer de 15% revient à multiplier par $1 - \frac{15}{100} = 0,85$ et on ajoute 450 adhérents chaque mois donc $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.

3. (a) Nature de la suite (v_n) :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = a_{n+1} - 3000$
   $v_{n+1} = 0,85a_n + 450 - 3000$
   $v_{n+1} = 0,85a_n - 2550$
   $v_{n+1} = 0,85\left(a_n - \frac{2550}{0,85}\right)$
   $v_{n+1} = 0,85\,(a_n - 3000)$
   $v_{n+1} = 0,85v_n$
   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $0,85$ et de terme initial $v_0 = a_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$.

   (b) v_n en fonction de n :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.

   (c) Expression de a_n en fonction de n :
   On a $v_n = a_n - 3000$ donc $a_n = v_n + 3000$ donc $a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.

4. Dépasser la moitié d'inscrits aux cours collectifs : Juin 2022 correspond au rang 9 or $a_9 = -2800 \times 0,85^9 + 3000 \approx 2351$.
   On estime le nombre d'inscrits à ces cours collectifs en juin 2022 à 2351 ce qui est inférieur à la moitié, l'objectif ne sera pas atteint.

Partie B :

1. Nombre d'adhérents étaient satisfaits à l'annonce de cette mesure :
   $u_0 = 1$ donc à l'annonce de cette mesure, il y a 1000 adhérents satisfaits.

2. Variations de la fonction f sur $I = [0; +\infty[$:
   f est dérivable sur I en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur I.
   $f'(x) = \dfrac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x + 10 - 5x - 4}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$.
   Pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur I.

3. (a) Récurrence : Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   - Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$.
     On a $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$. Montrons que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$
     On a $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$
     Donc $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(4)$ car la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.
     Avec $f(0) = \dfrac{5 \times 0 + 4}{0+2} = 2$ et $f(4) = \dfrac{5 \times 4 + 4}{4+2} = 4$
     Donc $0 \leqslant 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$
     Donc la propriété est héréditaire.
   - Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   (b) Convergence de (u_n) :
   La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 4. Donc d'après le théorème de convergence des suites monotones, la suite (u_n) converge vers une limite $l \leqslant 4$.

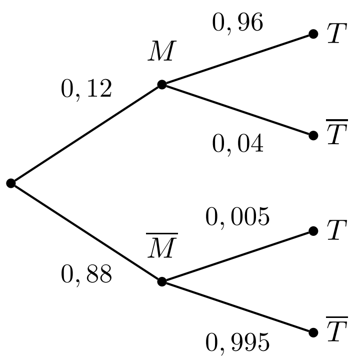
4. Limite de (u_n) :
   On a $4 - 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 4$.
   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$. Donc par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Et par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 4$
   Donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.
   Cela signifie qu'à très longs termes, le nombre d'adhérents satisfaits sera très proche de 4000.

Baccalauréat blanc n° 1 : Corrigé

Exercice 1 :

Partie A

1. Arbre pondéré :



2. Calcul et interprétation de $P(T \cap M)$:
On a $P(T \cap M) = P(M) \times P_M(T) = 0,12 \times 0,96 = 0,1152$
La probabilité que l'élève soit malade et que le test soit positif est de $0,1152$.

3. Calcul de $P(T)$:
M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(M) = P(M \cap T) + P(M \cap \overline{T})$
$P(M) = 0,1152 + 0,88 \times 0,005$
$P(M) = 0,1196.$

4. Commercialisation du test :
On cherche $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(M)} = \dfrac{0,1152}{0,1196} \approx 0,963 < 0,97$
Cette probabilité est trop faible, le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

1. (a) Loi de X :
L'expérience « Tester un élève du lycée » est une épreuve de Bernoulli de succès « Le test est positif ».
On répète 30 fois cette expérience de façon identiques et indépendantes et X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,163$.

   (b) Calcul de $P(X = 5)$:
On a $P(X = 5) = \dbinom{30}{5} \times 0,163^5 \times (1 - 0,163)^{30-5} \approx 0,192.$
La probabilité qu'il y ait 5 tests positifs est de $0,192$.

   (c) Calcul de $P(X \geqslant 10)$:
On a $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 0,017$
Donc la probabilité qu'au moins 10 des 30 élèves présentent un test positif est de $0,011$.

   (d) Calcul de $P(4 \leqslant X \leqslant 13)$:
$P(4 \leqslant X \leqslant 13) = P(X \leqslant 13) - P(X \leqslant 3) \approx 0,744.$
La probabilité qu'il y ait entre 4 et 13 tests positifs parmi les 25 est de $0,744$.

(e) $E(X)$:
On a $E(X) = n \times p = 30 \times 0,163 = 4.89$
L'espérance de X est de 4.89 ce qui signifie qu'en répétant un très grand nombre de fois l'expérience, il y aura une moyenne de 4.89 tests positifs dans un groupe de 30 élèves.

2. (a) Traduction du problème :
On a X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,163$.
On veut $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,998 \iff 1 - P(X=0) \geqslant 0,998$
$\iff 1 - \binom{n}{0} \times 0,163^0 \times (1-0,163)^{n-0} \geqslant 0,998$
$\iff 1 - 1 \times 1 \times (1-0,163)^n \geqslant 0,998$
$\iff 1 - 0,837^n \geqslant 0,998$
$\iff -0,837^n \geqslant 0,998 - 1$
$\iff -0,837^n \geqslant -0,002$
$\iff 0,837^n \leqslant 0,002$

(b) Réponse au problème :

A la calculatrice on obtient les résultats ci-contre :

n	$0,897^n$
33	$0,00252 > 0,002$
34	$0,00209 > 0,002$
35	$0,00174 < 0,002$
36	$0,00145 < 0,002$

Le nombre minimum d'élèves à tester pour que la probabilité de l'évènement « au moins un élève contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,998$ est de 35.

Exercice 2 :

Partie A :

1. Tangente au point O :
$f(0) = 0$
$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point O, elle passe par $A(1;4)$.
Donc $f'(0) = \dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = 4$
L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point O est donc $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit $y = 4x$.
2. Valeur de $f'(\sqrt{5}-1)$:
$f'\left(\sqrt{5}-1\right)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B, or cette tangente est horizontale, donc $f'\left(\sqrt{5}-1\right) = 0$.
3. Point d'inflexion :
La fonction semble passer de concave à convexe entre 2 et 3, donc on peut supposer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse est compris entre 2 et 3.

Partie B :

1. Tableau de variations :
La fonction f est de la forme $u \times v$ avec :

- $u(x) = x^2 + 4x$
- $u'(x) = 2x + 4$
- $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$
- $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= (2x+4)\mathrm{e}^{-x} - (x^2+4x)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-x^2-2x+4)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Comme $e^{-x} > 0$ car la fonction exponentielle est strictement positive, f' est du signe de $(-x^2 - 2x + 4)$:
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 + 4 \times (-1) \times (4) = 20 > 0$
f' admet donc deux racines x_1 et x_2 :

- $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - \sqrt{20}}{-2} = \sqrt{5} - 1 \simeq 1.236$
- $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + \sqrt{20}}{-2} = -\sqrt{5} - 1 \simeq -3,236$

On a donc le tableau suivant :

x	0		$\sqrt{5} - 1$		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$(2 + 2\sqrt{5})e^{1-\sqrt{5}}$	$\searrow$	$77e^{-7}$

2. Expression de f'' :
   On a $f''(x) = e^{-x}\left(x^2 - 6\right)$.
3. Convexité de f :
   On étudie le signe de f'' :
   $e^{-x} > 0$ pour tout x dans l'intervalle $[\ 0\ ;\ 7\ ]$, donc f'' est du signe de $(x^2 - 6)$:
   $x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = -\sqrt{6}$ ou $x = \sqrt{6}$.

x	0		$\sqrt{6}$		7
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		*Concave*		*Convexe*	

On retrouve bien le résultat de la partie A, c'est à dire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet bien un point d'inflexion, ce dernier a pour abscisse $\sqrt{6}$.

Partie C :

1. Nombre maximum de touristes :
   Le maximum de la fonction f sur $[\ 0\ ;\ 7\ ]$ est $(2+2\sqrt{5})e^{1-\sqrt{5}} \simeq 1,880$, il est atteint pour $x = \sqrt{5}-1 \simeq 1,236$. Cela correspond a environs 9 jours ce qui nous donne la date du 10 décembre.

2. Problème d'approvisionnement en eau :
   Le nombre maximal de touristes est de 1880, ce qui nous donne une consommation maximale d'eau de 75200 L (1880×40). La station pourra donc fournir assez d'eau à ses touristes.

3. On a trouvé précédemment que la fonction f devenait convexe à partir de $\sqrt{6} \simeq 2,45$.
La fréquentation va donc commencer à diminuer moins rapidement entre la deuxième et la troisième semaine.

Exercice 3 :

1. Soit X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de ce jeu. La loi de probabilité de X est la suivante :

x_i	-3	1	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = -3 \times \dfrac{1}{3} + 1 \times \dfrac{1}{2} + 3 \times \dfrac{1}{6} = 0$. Le gain moyen obtenu est donc de 0 euros. $\boxed{\text{Réponse a}}$

2. On a
— (DK) et (SD)sont confondues ;
— (AS) et (IC)sont sécantes en A ;
— (AC) et (SB)sont non coplanaires ;
— (LM) et (AD)sont parallèles.
Les droites suivantes ne sont pas coplanaires : $\boxed{\text{Réponse a}}$

3. L'algorithme retourne la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 30$. $\boxed{\text{Réponse b}}$

Exercice 4 :

Partie A :

1. Calcul de a_1 :
$a_1 = a_0 - 0,25 \times a_0 + 350 = 650$. Donc en octobre 2021, 650 adhérents ont suivi les cours collectifs.

2. Expression de a_{n+1} en fonction de a_n :
Diminuer de 25% revient à multiplier par $1 - \dfrac{25}{100} = 0,75$ et on ajoute 350 adhérents chaque mois donc $a_{n+1} = 0,75a_n + 350$.

3. (a) Nature de la suite (v_n) :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = a_{n+1} - 1400$
$v_{n+1} = 0,75a_n + 350 - 1400$
$v_{n+1} = 0,75a_n - 1050$
$v_{n+1} = 0,75\left(a_n - \dfrac{1050}{0,75}\right)$
$v_{n+1} = 0,75\,(a_n - 1400)$
$v_{n+1} = 0,75v_n$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $0,75$ et de terme initial $v_0 = a_0 - 1400 = 400 - 1400 = -1000$.

(b) v_n en fonction de n :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -1000 \times 0,75^n$.

(c) Expression de a_n en fonction de n :
On a $v_n = a_n - 1400$ donc $a_n = v_n + 1400$ donc $a_n = -1\,000 \times 0,75^n + 1\,400$.

4. Dépasser le tiers : Juin 2022 correspond au rang 9 or $a_9 = -1000 \times 0,75^9 + 1400 \approx 1325 > 1300$.
On estime le nombre d'inscrits à ces cours collectifs en juin 2022 à 1325 ce qui est supérieur au tiers , l'objectif sera atteint.

Partie B :

1. Nombre d'adhérents étaient satisfaits à l'annonce de cette mesure :
   $u_0 = 1$ donc à l'annonce de cette mesure, il y a 1000 adhérents satisfaits.

2. Variations de la fonction f sur $I = [0; +\infty[$:
   f est dérivable sur I en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur I.
   $f'(x) = \dfrac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x + 10 - 5x - 4}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$.
   Pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur I.

3. (a) Récurrence : Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   — Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$.
   On a $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   — Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$. Montrons que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$
   On a $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$
   Donc $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(4)$ car la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.
   Avec $f(0) = \dfrac{5 \times 0 + 4}{0+2} = 2$ et $f(4) = \dfrac{5 \times 4 + 4}{4+2} = 4$
   Donc $0 \leqslant 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$
   Donc la propriété est héréditaire.
   — Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   (b) Convergence de (u_n) :
   La suite (u_n) est donc croissante et majorée. Donc d'après le théorème de convergence des suites monotones, la suite (u_n) converge vers une limite $l \leqslant 4$.

4. Limite de (u_n) :
   On a $4 - 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 4$.
   Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$
   Donc par produit, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.
   Et par somme, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 4 - 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 4$
   Donc d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 4$.
   Cela signifie qu'à très longs termes, le nombre d'adhérents satisfaits sera très proche de 4000.