Mathématiques **Nom : ....** **TSpécialité 1,2 & 3**
Lycée Jean Calvin - Noyon 6 décembre 2021

Baccalauréat blanc n°1

Les calculatrices sont autorisées. Le barème prend en compte la rédaction, la qualité de l'expression et la présentation de la copie. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 :	/5
Exercice 2 :	/6
Exercice 3 :	/3
Exercice 4 :	/6
Total :	/20

Le sujet est à rendre avec la copie.
Durée : 4h

Exercice 1 :

Cet exercice est composé de deux parties qui peuvent se traiter de façon indépendante.

Un nouveau test antigènique vient d'être proposé par un laboratoire pharmaceutique pour détecter une nouvelle maladie, appelée flemmingite aiguë, touchant les lycéens.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si une personne est malade, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;
- si une personne n'est pas malade, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On teste un lycéen choisi au hasard.
On note M l'évènement « l'élève est malade » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement M est égale à $0,08$.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Calculer et interpréter $P(T \cap M)$
3. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
4. Le laboratoire décide de commercialiser les tests si la probabilité de l'évènement « un lycéen présentant un test positif est malade » est supérieure ou égale à $0,95$. Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Les probabilités demandées dans cette partie seront arrondies à 10^{-3}.
Dans un lycée, on admet que la probabilité qu'un élève testé présente un test positif est $0,103$.

1. Dans cette question **1.** on suppose que les autorités médicales décident de contrôler 25 élèves choisis au hasard dans le lycée en question. On admet que l'effectif du lycée est assez grand pour considérer cette expérience comme un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves présentant un test positif parmi les 25 élèves testés.
   (a) Donner, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité qu'exactement 3 élèves présentent un test positif.
   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins 7 des 25 élèves présentent un test positif ?
   (d) Calculer $P(3 \leqslant X \leqslant 10)$. Interpréter le résultat.
   (e) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On cherche à connaitre le nombre minimum d'élèves à tester pour que la probabilité de l'évènement « au moins un élève contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,998$?
   (a) Justifier que le problème revient à trouver le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité $0.897^n \leqslant 0.002$
   (b) À l'aide de la calculatrice, répondre au problème.

Exercice 2 :

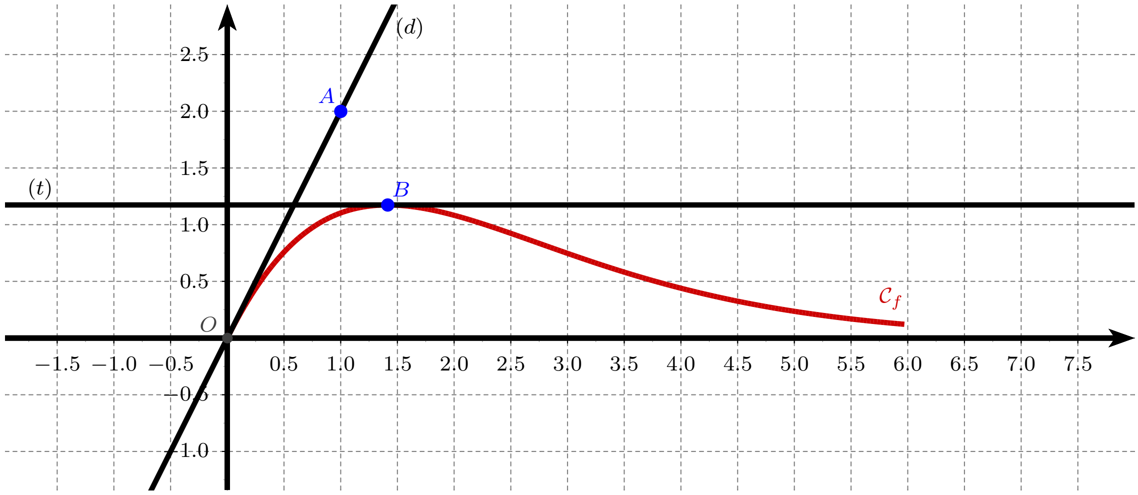
Partie A :

Soit f, une fonction dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ sur $[\ 0\ ;\ 6\ ]$ est donnée ci-dessous.

— La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point $O(\ 0\ ;\ 0\ )$ et par le point B d'abscisse $\sqrt{2}$;

— La droite (d) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point O et passe par le point $A(\ 1\ ;\ 2\ )$;

— La droite (t) est tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$ en B.



Dans cette partie, les réponses seront obtenues par lecture graphique.

1. Donner $f(0)$ et déterminer $f'(0)$.
   En déduire l'équation réduite de la tangente (d) à $\mathcal{C}_f$ au point O.
2. Donner $f'\left(\sqrt{2}\right)$. Justifier.
3. Pourquoi peut-on conjecturer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I ?
   Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse du point I.

Partie B :

La fonction représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 6\ ]$ par

$$f(x) = \left(x^2 + 2x\right) \mathrm{e}^{-x}$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[\ 0\ ;\ 6\ ]$.
   En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 6\ ]$.
2. Un logiciel de calcul formel a été utilisé pour déterminer l'expression de $f''(x)$:

Dérivée $\left(-e^{-x}\left(x^2-2\right)\right)$ $\rightarrow -2e^{-x}x + e^{-x}(x^2-2)$
Factoriser $\left(-2e^{-x}x + e^{-x}(x^2-2)\right)$ $\rightarrow e^{-x}\left(x^2-2x-2\right)$

   Donner, sans justifier, l'expression de $f''(x)$.
3. En déduire la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 6\ ]$.
   Ce résultat est-il cohérent avec la réponse obtenue dans la partie A ?

Partie C :

La fréquentation de touristes d'une station balnéaire pour l'été 2021 a été modélisée par la fonction f précédente définie sur l'intervalle $[\,0\,;\,6\,]$ où x est le nombre de semaines à partir du 1^{ier} juillet et $f(x)$ le nombre de touristes en dizaines de milliers.
Ainsi, $f(3)$ représente le nombre de touristes présents dans cette station balnéaire lors de la $3^{\text{ième}}$ semaine.

1. Déterminer le nombre maximal (à l'unité près) de touristes présents dans la station balnéaire durant l'été 2021 et préciser la date à laquelle cela a eu lieu, a deux jours près.
2. On estime qu'un touriste consomme en moyenne 50 litres d'eau par jour.
   La station balnéaire peut fournir quotidiennement 580 000 litres d'eau.
   Le jour où la fréquentation est maximale, la commune aura-t-elle suffisamment d'eau pour ses touristes ? Justifier.
3. Déterminer au cours de quelle semaine la fréquentation de touristes va décroître moins rapidement.

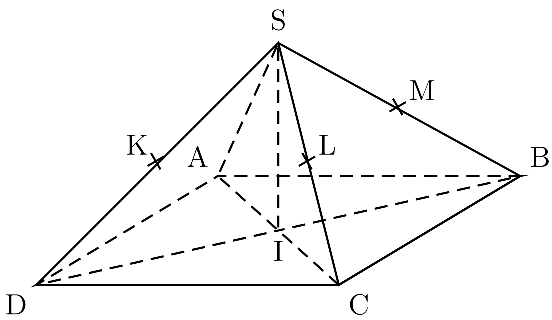
Exercice 3 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. Dans une fête foraine, une jeu consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
   Pour jouer, le joueur doit miser 2 euros et :
   — Il gagne 6 euros s'il obtient un 6 ;
   — Il gagne 3 euros s'il obtient un 2 ou un 4 ;
   — Il ne gagne rien dans les autres cas.
   En jouant un très grand nombre de fois à ce jeu, quel sera le gain moyen obtenu par le joueur ?

   (a) 0 euros ;
   (b) 2 euros ;
   (c) -2 euros ;
   (d) On ne peut pas savoir.

2. SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
   Le point I est le centre du carré ABCD.
   On suppose que : IC = IB = IS = 1.
   Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB]. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :



   (a) (DK) et (SD) ;
   (b) (AS) et (IC) ;
   (c) (AC) et (SB) ;
   (d) (LM) et (AD).

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 5$.
   On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python ci-contre :

```
def seuil :
    u = 2
    n = 0
    while u < 45 :
        u = 1.05*u + 5
        n = n+1
    return n
```

   Que retourne la fonction « seuil » en sortie ?

   (a) la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$;
   (b) la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;
   (c) la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$;
   (d) La plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$.

Exercice 4 :

En septembre 2021, une chaîne de salles de sport appelée Simplefit fait le choix de développer des cours collectifs. Elle propose alors à ses 5 000 adhérents de participer à des cours collectifs.
En septembre 2021, seuls 200 d'entre eux ont choisi les cours collectifs.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de la chaîne constatent que 15 % de ceux qui avaient choisi les cours collectifs le mois précédent abandonnent, et que, chaque mois, 450 adhérents supplémentaires choisissent de suivre les cours collectifs.
On modélise le nombre d'adhérents de Simplefit qui suivent les cours collectifs par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre d'adhérents suivant les cours collectifs le n-ième mois après le mois de septembre 2021. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3\,000$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.
4. La direction de Simplefit a pour objectif que la moitié de ses adhérents suive les cours collectifs.
   Cet objectif sera-t-il atteint en juin 2022 ? Justifier.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur ses adhérents, les dirigeants de Simplefit sont parvenus à modéliser le nombre d'adhérents satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers d'adhérents satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de septembre 2021.

1. Combien d'adhérents étaient satisfaits à l'annonce de cette mesure ?
2. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

   (b) Justifier que la suite (u_n) est convergente.
4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$4 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 4.$$

   En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

Baccalauréat blanc n°1

Les calculatrices sont autorisées. Le barème prend en compte la rédaction, la qualité de l'expression et la présentation de la copie. Le barème est donné à titre indicatif.

Le sujet est à rendre avec la copie.
Durée : 4h

Exercice 1 :	/5
Exercice 2 :	/6
Exercice 3 :	/3
Exercice 4 :	/6
Total :	/20

Exercice 1 :

Cette exercice est composé de deux parties qui peuvent se traiter de façon indépendante.

Un nouveau test antigènique vient d'être proposé par un laboratoire pharmaceutique pour détecter la nouvelle maladie, appelée flemmingite aiguë, touchant les lycéens.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :
- si une personne est malade, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,96$ (sensibilité du test) ;
- si une personne n'est pas malade, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à l'ensemble des lycéens de Picardie.
On note M l'évènement « l'élève est malade » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement M est égale à 0,12.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Calculer et interpréter $P(T \cap M)$
3. Démontrer que $P(T) = 0,1196$.
4. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un lycéen présentant un test positif est malade » est supérieure ou égale à $0,97$. Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

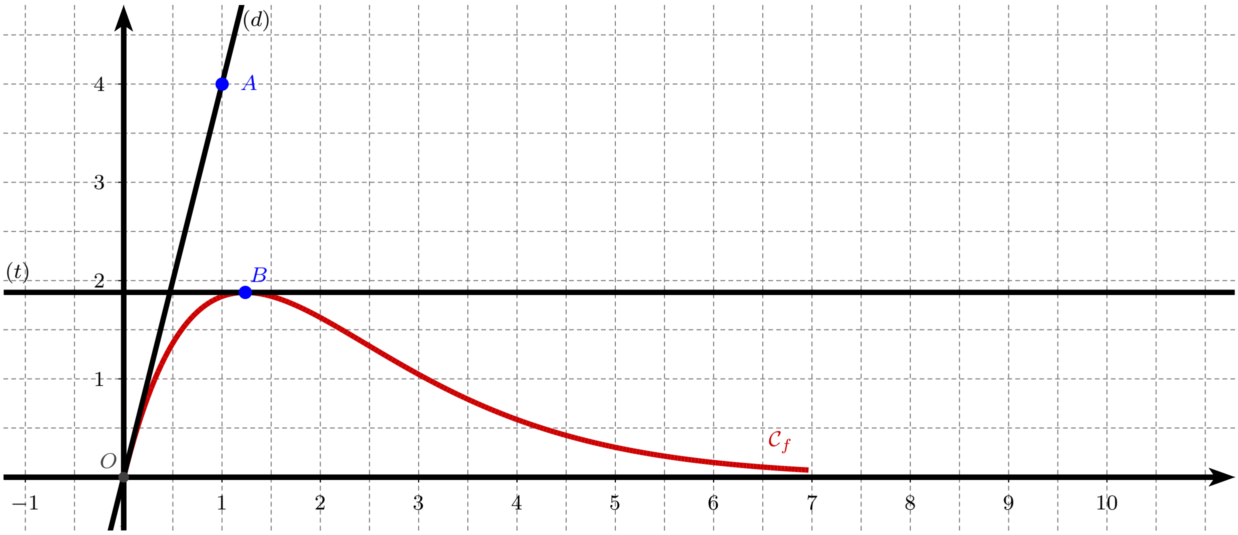
Partie B

Les probabilités demandées dans cette partie seront arrondies à 10^{-3}.
Dans un lycée, on admet que la probabilité qu'un élève testé présente un test positif est $0,163$.

1. Dans cette question **1.** on suppose que les autorités médicales décident de contrôler 30 élèves au hasard dans le lycée en question. On admet que l'effectif du lycée est assez grand pour considérer cette expérience comme un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves présentant un test positif parmi les 30 élèves testés.
   (a) Donner, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité qu'exactement 5 élèves présentent un test positif.
   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins 10 des 30 élèves présentent un test positif ?
   (d) Calculer $P(4 \leqslant X \leqslant 13)$. Interpréter le résultat.
   (e) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On cherche à connaitre le nombre minimum d'élèves à tester pour que la probabilité de l'évènement « au moins un élève contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,998$?
   (a) Justifier que le problème revient à trouver le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité $0.837^n \leqslant 0.002$
   (b) À l'aide de la calculatrice, répondre au problème.

Exercice 2 :

Partie A :
Soit f, une fonction dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ sur $[\ 0\ ;\ 7\ ]$ est donnée ci-dessous.
- La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point $O(\ 0\ ;\ 0\ )$ et par le point B d'abscisse $\sqrt{5}-1$;
- La droite (d) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point O et passe par le point $A(\ 1\ ;\ 4\ )$;
- La droite (t) est tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$ en B.



Dans cette partie, les réponses seront obtenues par lecture graphique.

1. Donner $f(0)$ et déterminer $f'(0)$.
   En déduire l'équation réduite de la tangente (d) à $\mathcal{C}_f$ au point O.
2. Donner $f'\left(\sqrt{5}-1\right)$. Justifier.
3. Donner un intervalle défini sur lequel la fonction semble convexe.
4. Pourquoi peut-on conjecturer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I ?
   Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse du point I.

Partie B :

La fonction représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 7\ ]$ par

$$f(x) = \left(x^2+4x\right)\mathrm{e}^{-x}$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[\ 0\ ;\ 7\ ]$.
   En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 7\ ]$.
2. Un logiciel de calcul formel a été utilisé pour déterminer l'expression de $f''(x)$:

Dérivée $\left(-e^{-x}\left(-x^2-2x+4\right)\right)$ $\rightarrow e^{-x}(-2x-2)-e^{-x}(-x^2-2x+4)$
Factoriser $\left(e^{-x}(-2x-2)-e^{-x}(-x^2-2x+4)\right)$ $\rightarrow e^{-x}\left(x^2-6\right)$

   Donner, sans justifier, l'expression de $f''(x)$.
3. En déduire la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 7\ ]$.
   Ce résultat est-il cohérent avec la réponse obtenue dans la partie A ?

Partie C :

La fréquentation de touristes d'une station alpine pour l'hiver 2020/2021 a été modélisée par la fonction f précédente définie sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 7\ ]$ où x est le nombre de semaines à partir du 1^{ier} décembre 2020 (date d'ouverture de la station) et $f(x)$ le nombre de touristes en milliers.

Ainsi, $f(4)$ représente le nombre de touristes présents dans cette station alpine lors de la $4^{\text{ième}}$ semaine.

1. Déterminer le nombre maximal de touristes (à l'unité près) présents dans la station alpine durant l'hiver 2020/2021 et préciser la date à laquelle cela a eu lieu, a deux jours près.
2. On estime qu'un touriste consomme en moyenne 40 litres d'eau par jour.
   La station alpine peut fournir quotidiennement 76 000 litres d'eau.
   Le jour où la fréquentation est maximale, la station aura-t-elle suffisamment d'eau pour ses touristes ? Justifier.
3. Déterminer lors de quelle semaine la fréquentation de touristes va décroître moins rapidement.

Exercice 3 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

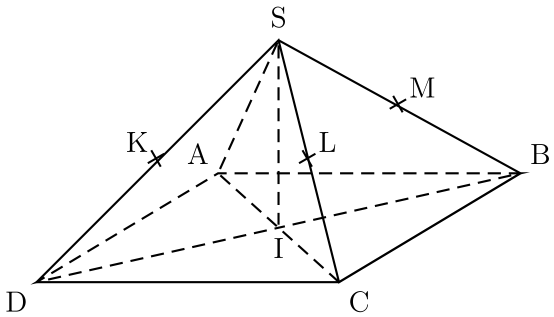
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1. Dans une fête foraine, une jeu consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. Pour jouer, le joueur doit miser 3 euros et :
   — Il gagne 6 euros s'il obtient un 6 ;
   — Il gagne 4 euros s'il obtient un 2 ou un 3 ou un 4 ;
   — Il ne gagne rien dans les autres cas.
   En jouant un très grand nombre de fois à ce jeu, quel sera le gain moyen obtenu par le joueur ?

   (a) 0 euros ;
   (b) 3 euros ;
   (c) -3 euros ;
   (d) On ne peut pas savoir.

2. SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
   Le point I est le centre du carré ABCD.
   On suppose que : IC = IB = IS = 1.
   Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB]. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :



   (a) (AC) et (SB) ;
   (b) (LM) et (AD) ;
   (c) (DK) et (SD) ;
   (d) (AS) et (IC).

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 5$.
   On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil :
   u = 2000
   n = 0
   while u > 30 :
      u = 0.75*u + 5
      n = n+1
   return n
```

   (a) la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 30$;
   (b) la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 30$;
   (c) la plus grande valeur de n telle que $u_n \leqslant 30$;
   (d) la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 30$.

Exercice 4 :

En septembre 2021, une chaîne de salles de sport appelée Simplefit fait le choix de développer des cours collectifs. Elle propose alors à ses 3 900 adhérents de choisir entre des cours collectifs.
En septembre 2021, seuls 400 d'entre eux ont choisi les cours collectifs.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de la chaîne constatent que 25 % de ceux qui avaient choisi les cours collectifs le mois précédent abandonnent, et que, chaque mois, 350 adhérents supplémentaires choisissent de suivre les cours collectifs.
On modélise le nombre d'adhérents de Simplefit qui suivent les cours collectifs par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre d'adhérents suivant les cours collectifs le n-ième mois après le mois de septembre 2021. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,75a_n + 350$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 1\,400$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,75$.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -1\,000 \times 0,75^n + 1\,400$.
4. La direction de Simplefit a pour objectif que le tiers de ses adhérents suive les cours collectifs.
   Cet objectif sera-t-il atteint en juin 2022 ?

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur ses adhérents, les dirigeants de Simplefit sont parvenus à modéliser le nombre d'adhérents satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers d'adhérents satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de septembre 2021.

1. Combien d'adhérents étaient satisfaits à l'annonce de cette mesure ?
2. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

   (b) Justifier que la suite (u_n) est convergente.
4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$4 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 4.$$

   En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.