Mathématiques **Nom : ....** **TSpécialité 1,2 & 3**
Lycée Jean Calvin - Noyon Mai 2021

Baccalauréat blanc n°2

Les calculatrices sont autorisées. Le barème prend en compte la rédaction, la qualité de l'expression et la présentation de la copie. Le barème est donné à titre indicatif.

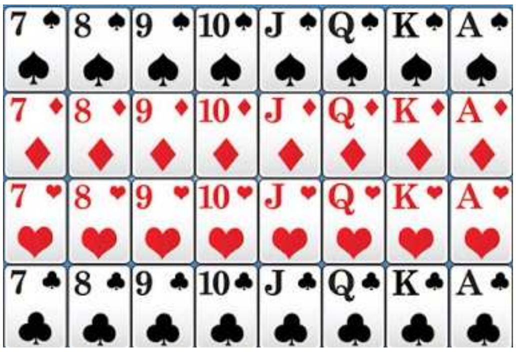
Le sujet est à rendre avec la copie.
Durée : 4h

Exercice 1 :	/5
Exercice 2 :	/5
Exercice 3 :	/6
Exercice 4 :	/4
Total :	/20

Exercice 1 :

Pour cet exercice, utilisez un vocabulaire précis et les notations mathématiques adéquates. Les formules utilisées devront être explicitées.
Les parties ne sont pas indépendantes mais les données du sujet vous permettent de les traiter séparément.

Frank N. Stein dispose d'un jeu de 32 cartes :



Partie A :

Frank tire simultanément 5 cartes dans ce jeu de 32 cartes.

1. Combien de tirages possibles y a-t-il ?
2. Combien de mains de 5 cartes contiennent au moins 1 as ?
3. En déduire que la probabilité d'obtenir au moins un as en tirant 5 cartes dans un jeu de 32 cartes est d'environ $0,51$ à 10^{-2} près

Partie B :

Frank joue à un jeu de cartes. Au début du jeu, il tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, la probabilité qu'il ait au moins un as en début de partie est de 0,51. Frank a remarqué que :
— S'il a au moins un as dans sa main en début de partie, il gagne dans 74% des cas.
— S'il n'a pas d'as dans sa main en début de partie, il perd la partie dans 82% des cas.

On note A l'événement « Frank a au moins un as en début de partie »
et S l'événement « Frank gagne la partie ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Montrer que $P(S) = 0,4656$.
3. Frank a perdu une partie, quelle est la probabilité qu'il ait commencé cette partie sans aucun as dans son jeu ? Arrondir à 10^{-2} près.

Partie C :

Frank participe à un tournoi dans lequel il joue à ce jeu dont il gagne une partie avec une probabilité de $0,4656$. Au cours de ce tournoi, il enchaîne 10 parties. On considère que toutes les parties de ce tournoi sont indépendantes. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées à ce tournoi.

1. Quelle est la loi suivie par X ? *Soignez la rédaction et soyez précis.*
2. Le prix d'honneur est accordé à tous les joueurs ayant gagné au moins 7 parties de ce tournoi.
   Quelle est la probabilité que Frank obtienne ce prix ? Arrondir à 10^{-2} près.

Exercice 2 :

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5$ μg/mL.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. (a) Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?
   (b) Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
   (c) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
   Vérifier que pour tout nombre réel t positif,
   $$f'(t) = \left(3 - \frac{3}{4}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}.$$
3. (a) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).
   (b) À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
   Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. (a) Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0; 4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
   On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4 ; +\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2,5$.
   On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1 \approx 18,930$.
   (b) Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x) = \dfrac{2+3x}{4+x}$.

Partie A

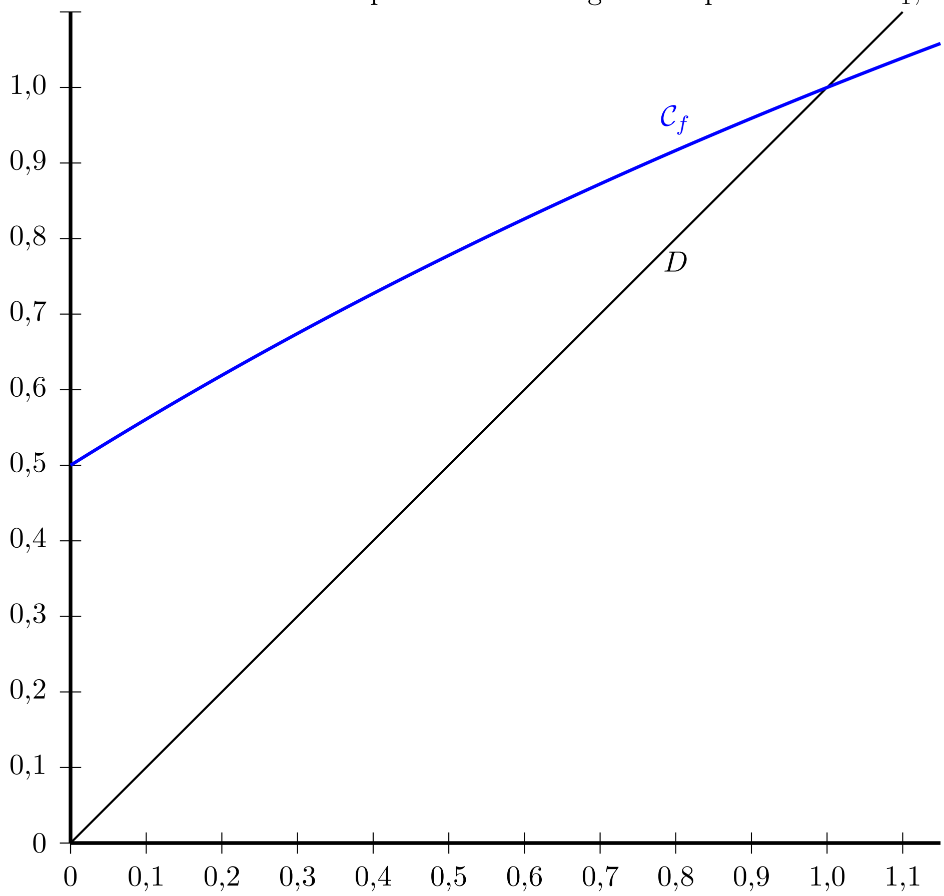
On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.
4. (a) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (b) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; justifier l'égalité : $\ell = \dfrac{2+3\ell}{4+\ell}$.
   (c) Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

1. On donne ci-dessous la courbe représentative, $\mathcal{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
   Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3.



   Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

2. On admet que pour tout entier naturel n, $1 - v_{n+1} = \left(\dfrac{2}{4+v_n}\right)(1 - v_n)$.

   Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Exercice 4 :

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2\,;1\,;4)$, $(4\ ;\ -1\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ 3\ ;\ 2)$ et $(4\ ;\ 3\ ;\ -2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).
2. Soit M un point de la droite (CD).
   (a) Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
   (b) On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3\ ;\ 3\ ;\ -1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
   (c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.
3. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).
   (d) Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$.
4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.