Correction du bac blanc n°1 : Sujet A

Exercice n°1 :

1) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$ Réponse (d)

2) $\overrightarrow{IF}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires Réponse (a)

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^3+3n^2-5}{-3n^2+4n-2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{-3n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{3}n = -\infty$ Réponse (c)

4) Toute suite croissante est minorée. Réponse (c)

Exercice n°2 :

Partie A :

1) Entre le 1er janvier 2003 et le 1er janvier 2006, le nombre de commandes diminue puis augmente jusqu'au 1er janvier 2022.

2) Au 1er janvier 2017, (c'est-à-dire pour $x = 14$) le nombre de commandes est d'environ : 800 000.

3) L'augmentation commence à ralentir où la fonction change de convexité soit environ pour $x = 9$, soit au 1er janvier 2012.

Partie B :

.1) Au 1er janvier 2017 : $f(14) = 3260e^{-1,4} \approx 804\,000$ commandes.

2) a) $f = u \times v$ avec $u(x) = 20x^2 - 80x + 460$ $v(x) = e^{-0,1x}$

$u'(x) = 40x - 80$ $v'(x) = -0,1e^{-0,1x}$

D'où $f' = u'v + v'u$ c'est-à-dire $f'(x) = (40x - 80)e^{-0,1x} - 0,1e^{-0,1x}(20x^2 - 80x + 460)$

$$= e^{-0,1x}[40x - 80 - 0,1(20x^2 - 80x + 460)]$$

$$= (-2x^2 + 48x - 126)e^{-0,1x}$$

b) $e^{-0,1x} > 0$ donc $f'(x)$ du signe de $-2x^2 + 48x - 126$

$\Delta = 48^2 - 4 \times (-2) \times (-126) = 1296 > 0$ donc deux solutions : $x_1 = 3$ et $x_2 = 21$.

D'où le tableau de variations sur $[0\,;29]$:

x	0		3		21		29
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$f(0) = 460$ $f(3) = 400e^{-0,3} \approx 296$ $f(21) = 7600e^{-2,1} \approx 931$ $f(29) = 14960e^{-2,9} \approx 823$

c) La valeur maximale de f sur $[0\,;29]$ est 931 soit 931 000 commandes donc la barre du million ne sera pas atteinte.

4) a) D'après le logiciel, $f''(x) = 0{,}2e^{-0{,}1x}(x^2 - 44x + 303)$

$0{,}2e^{-0{,}1x} > 0$ donc $f''(x)$ du signe de : $x^2 - 44x + 303$.

Ce polynôme admet deux racines $x_1 = 22 - \sqrt{181} \approx 8{,}5 \in [0\,;29]$et $x_2 = 22 + \sqrt{181} \approx 35{,}5 \notin [0\,;29]$.

x	0 $\qquad$ x_1	29
$f''(x)$	$+$	$-$
convexité	convexe	concave

L'augmentation du nombre de commandes commencera à ralentir à partir du 1er janvier 2012 (2003 +9).

<u>Exercice n°3</u> :

<u>Partie A</u> :

1) $a_1 = \left(1 + \frac{14}{100}\right) a_0 - 7 = 1{,}14 \times 120 - 7 = 129{,}8$

2) a) $v_{n+1} = a_{n+1} - 50$

$= 1{,}14a_n - 7 - 50$

$= 1{,}14a_n - 57$

$= 1{,}14\left(a_n - \frac{57}{1{,}14}\right)$

$= 1{,}14(a_n - 50)$

$= 1{,}14\, v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}14$ et de premier terme $v_0 = a_0 - 50 = 70$.

b) $v_n = v_0 \times q^n = 70 \times 1{,}14^n$

c) D'où $a_n = v_n + 50 = 50 + 70 \times 1{,}14^n$

3) On cherche n tel que $a_n \geq 240$. Grâce à la calculatrice, on trouve $n = 8\ \ car\ a_7 \approx 225{,}2 < 240$

$et\ a_8 \approx 249{,}7 > 240.$

4) $\lim_{n\to+\infty} 1{,}14^n = +\infty\ car\ 1{,}14 > 1 \quad donc\ \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ donc, ce modèle ne contredit pas cette annonce.

<u>Partie B</u> :

1) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 5x + 4$ $\qquad v(x) = x + 2$

$u'(x) = 5$ $\qquad v'(x) = 1$

Donc : $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ c'est-à-dire $f'(x) = \frac{5(x+2) - 1(5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0\,;\ +\infty[$.

2) a) Initialisation : $u_0 = 1$ $\qquad u_1 = f(u_0) = f(1) = 3$ $\qquad$ et $0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$ donc vrai.

Hérédité : On suppose que pour un entier $k \neq 0, 0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$.

Montrons alors que : $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$.

D'après l'hypothèse de récurrence : $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$

Donc $f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(4)$ car f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

D'où : $0 \leq 2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$ donc, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : La propriété est vraie au rang $n = 0$.

De plus, elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) (u_n) est croissante et majorée par 4, donc (u_n) converge.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

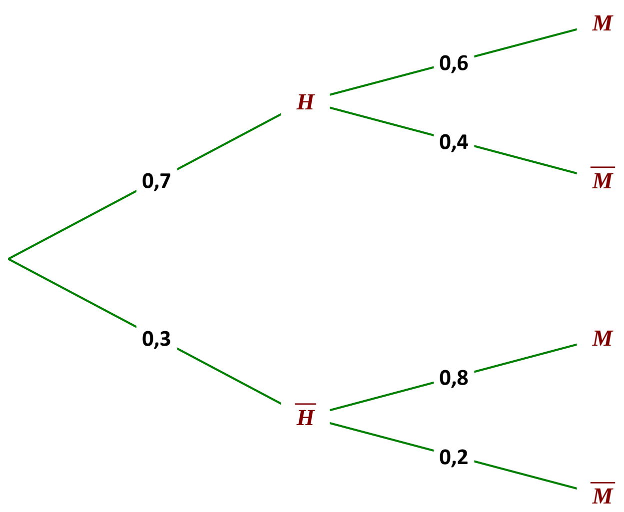
Donc d'après le théorème des Gendarmes, $\lim\limits_{n\to\infty} 4 - u_n = 0$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$.

Donc, sur le long terme, le nombre de clients se rapprochera de 4000 par an.

<u>Exercice n°4</u> :

<u>Partie A</u> :

1)



2) $P(\overline{H} \cap M) = P(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(M) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.

3) Les événements H et $\overline{H}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(M) = P(M \cap H) + P(M \cap \overline{H}) = 0{,}7 \times 0{,}6 + 0{,}24 = 0{,}66.$$

4) $P_M(H) = \frac{P(M\cap H)}{P(M)} = \frac{0{,}7\times 0{,}6}{0{,}66} \approx 0{,}64 > 0{,}5$ donc, oui, l'affirmation est exacte.

<u>Partie B</u> :

1)

Evénement	$\overline{H} \cap \overline{M}$	$\overline{H} \cap M$	$H \cap \overline{M}$	$H \cap M$
t_i	0	20	100	120
$P(T = t_i)$	0,06	0,24	0,28	0,42

2) $E(T) = \sum P(T = t_i) \times t_i = 0{,}06 \times 0 + 0{,}24 \times 20 + 0{,}28 \times 100 + 0{,}42 \times 120 = 83{,}20$.

Donc, en, moyenne, la somme dépensée par un client sera de 83,20 €.

Partie C :

1) On répète 10 fois de façon identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli, où S : « le client visite le musée Sherlock Holmes » avec $P(S) = 0{,}66$. Alors, S suit $B(10\,;0{,}66)$.

2) $P(S = 4) = \binom{10}{4} \times 0{,}66^4 \times (1 - 0{,}66)^{(10-4)} \approx 0{,}062$.

3) $P(S \geq 8) = 1 - P(S \leq 7) \approx 0{,}284$.

Exercice n°1 :

1) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$ Réponse (c)

2) J'ai un problème avec cette question….. ?

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^3+3n^2-5}{-3n^2+4n-2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{-3n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{3}n = -\infty$ Réponse (a)

4) Toute suite croissante est minorée. Réponse (a)

Exercice n°2 :

Partie A :

1) Entre le 1er janvier 2003 et le 1er janvier 2006, l'audience journalière diminue puis augmente jusqu'au 1er janvier 2022.

2) Au 1er janvier 2017, (c'est-à-dire pour $x = 14$) le nombre de téléspectateurs est d'environ : 800 000.

3) L'augmentation commence à ralentir où la fonction change de convexité soit environ pour $x = 9$, soit au 1er janvier 2012.

Partie B :

.1) Au 1er janvier 2017 : $f(14) = 3260e^{-1,4} \approx 804\,000$ téléspectateurs.

2) a) $f = u \times v$ avec $u(x) = 20x^2 - 80x + 460$ $v(x) = e^{-0,1x}$

$u'(x) = 40x - 80$ $v'(x) = -0,1e^{-0,1x}$

D'où $f' = u'v + v'u$ c'est-à-dire $f'(x) = (40x - 80)e^{-0,1x} - 0,1e^{-0,1x}(20x^2 - 80x + 460)$

$= e^{-0,1x}[40x - 80 - 0,1(20x^2 - 80x + 460)]$

$= (-2x^2 + 48x - 126)e^{-0,1x}$

b) $e^{-0,1x} > 0$donc $f'(x)$ du signe de $-2x^2 + 48x - 126$

$\Delta = 48^2 - 4 \times (-2) \times (-126) = 1296 > 0$ donc deux solutions : $x_1 = 3$ et $x_2 = 21$.

D'où le tableau de variations sur $[0\,;29]$:

x	0		3		21		29
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$f(0) = 460$ $f(3) = 400e^{-0,3} \approx 296$ $f(21) = 7600e^{-2,1} \approx 931$ $f(29) = 14960e^{-2,9} \approx 823$

c) La valeur maximale de f sur $[0\,;29]$ est 931 soit 931 000 téléspectateurs donc la barre du million ne sera pas atteint.

3) a) D'après le logiciel, $f''(x) = 0,2e^{-0,1x}(x^2 - 44x + 303)$

$0{,}2e^{-0{,}1x} > 0$ donc $f''(x)$ du signe de : $x^2 - 44x + 303$.

Ce polynôme admet deux racines $x_1 = 22 - \sqrt{181} \approx 8{,}5 \in [0\,;29]$et $x_2 = 22 + \sqrt{181} \approx 35{,}5 \notin [0\,;29]$.

x	0	x_1	29
$f''(x)$	+		$-$
convexité	convexe		concave

L'augmentation du nombre de téléspectateurs commencera à ralentir à partir du 1er janvier 2012 (2003 +9).

<u>Exercice n°3</u> :

<u>Partie A</u> :

1) $a_1 = \left(1 - \frac{20}{100}\right) a_0 + 45 = 0{,}80 \times 150 + 45 = 165.$

2) a) $v_{n+1} = a_{n+1} - 225$

$= 0{,}8a_n + 45 - 225$

$= 0{,}8a_n - 180$

$= 0{,}8\left(a_n - \frac{180}{0{,}8}\right)$

$= 0{,}8(a_n - 225)$

$= 0{,}8\, v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = a_0 - 225 = -75$.

b) $v_n = v_0 \times q^n = -75 \times 0{,}8^n$

c) D'où $a_n = v_n + 225 = 225 - 75 \times 0{,}8^n$

3) On cherche n tel que $a_n \geq 150 \times 1{,}45$ soit 218. Grâce à la calculatrice,

on trouve $n = 11\ car\ a_{10} \approx 216{,}9 < 218\ \ et\ a_{11} \approx 218{,}6 > 218$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0\ car -1 < 0{,}8 < 1 \quad donc \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 225$ donc, les organisateurs ne devront pas refuser des inscriptions

<u>Partie B</u> :

1) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 5x + 4$ $\quad v(x) = x + 2$

$u'(x) = 5 \quad v'(x) = 1$

Donc : $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ c'est-à-dire $f'(x) = \frac{5(x+2) - 1(5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0\,;\ +\infty[$.

2) a) Initialisation : $u_0 = 1$ $\quad u_1 = f(u_0) = f(1) = 3$ $\quad$ et $0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$ donc vrai.

Hérédité : On suppose que pour un entier $k \neq 0, 0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$.

Montrons alors que : $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$.

D'après l'hypothèse de récurrence : $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$

Donc $f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(4)$ car f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

D'où : $0 \leq 2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$ donc, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : La propriété est vraie au rang $n = 0$.

De plus, elle est héréditaire, donc, d' après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) (u_n) est croissante et majorée par 4, donc (u_n) converge.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

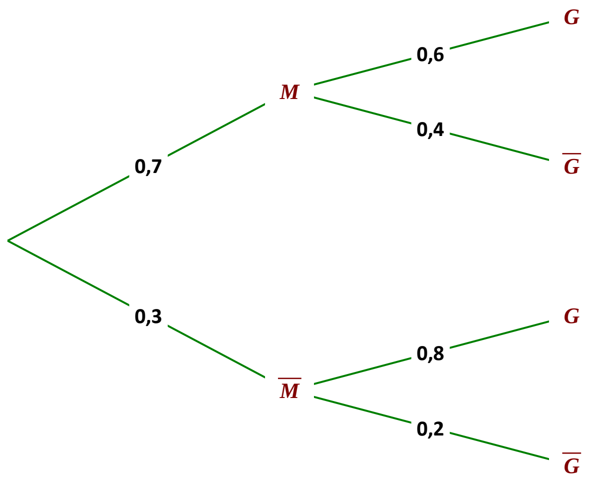
Donc d'après le théorème des Gendarmes, $\lim\limits_{n\to\infty} 4 - u_n = 0$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$.

Donc, sur le long terme, le nombre de personnes inscrites pour profiter du repas se rapprochera de 400.

<u>Exercice n°4</u> :

<u>Partie A</u> :

1)



2) $P(\overline{M} \cap G) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(G) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.

3) Les événements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(G) = P(M \cap G) + P(\overline{M} \cap G) = 0{,}7 \times 0{,}6 + 0{,}24 = 0{,}66.$$

4) $P_G(M) = \frac{P(M\cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}7\times 0{,}6}{0{,}66} \approx 0{,}64 > 0{,}5$ donc, oui, l'affirmation est exacte.

<u>Partie B</u> :

1)

Evénement	$\overline{M} \cap \bar{G}$	$\overline{M} \cap G$	$M \cap \bar{G}$	$M \cap G$
$T = t_i$	0	5	12	17

$P(T = t_i)$	0,06	0,24	0,28	0,42

2) $E(T) = \sum P(T = t_i) \times t_i = 0{,}06 \times 0 + 0{,}24 \times 5 + 0{,}28 \times 12 + 0{,}42 \times 17 = 11{,}70$.

Donc, en, moyenne, la somme dépensée par un client sera de 11,70 €.

Partie C :

1) On répète 100 fois de façon identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli, où S : « le client visite la grotte » avec $P(S) = 0{,}66$. Alors, S suit $B(100\,; 0{,}66)$.

2) $P(S = 65) = \binom{100}{65} \times 0{,}66^{65} \times (1 - 0{,}66)^{(100-65)} \approx 0{,}081$.

3) $P(S \geq 75) = 1 - P(S \leq 74) \approx 0{,}034$.